

振动测试分析

期末复习

李丹

2026 年 6 月 15 日

本次复习覆盖的核心知识：

- **信号采集**：采样定理、信号重构、混叠与抗混叠、频谱泄漏
- **模态识别**：频响函数、峰值拾取法、DMD、ERA
- **卡尔曼滤波**：最小二乘 $\rightarrow$ RLS $\rightarrow$ 状态传递 $\rightarrow$ KF
- **模型修正**：参数化建模、时域/频域修正、优化算法

学习目标

- 理解核心概念与算法的**物理意义**和**几何直观**；
- 掌握关键公式的**推导思路**和**适用条件**；
- 能在**典型问题**中熟练运用相应方法。

信号采集与采样定理

模态识别

卡尔曼滤波

模型修正

综合习题与小结

信号采集与采样定理

Fourier 变换基本公式

连续时间 Fourier 变换 (CTFT) :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

连续时间 Fourier 变换 (CTFT) :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

主要性质:

- 线性: $\mathcal{F}\{ax + by\} = aX(\omega) + bY(\omega)$
- 时移: $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} X(\omega)$
- 频移: $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} x(t)\} = X(\omega - \omega_0)$
- 微分: $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = i\omega X(\omega)$; $\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 X(\omega)$
- **卷积定理**: $\mathcal{F}\{x * y\} = X(\omega) Y(\omega)$; $\mathcal{F}\{xy\} = \frac{1}{2\pi} X * Y$
- Parseval: $\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |X(\omega)|^2 d\omega$

Fourier 变换基本公式

连续时间 Fourier 变换 (CTFT) :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

主要性质:

- 线性: $\mathcal{F}\{ax + by\} = aX(\omega) + bY(\omega)$
- 时移: $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} X(\omega)$
- 频移: $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} x(t)\} = X(\omega - \omega_0)$
- 微分: $\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = i\omega X(\omega)$; $\mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2 X(\omega)$
- **卷积定理**: $\mathcal{F}\{x * y\} = X(\omega) Y(\omega)$; $\mathcal{F}\{xy\} = \frac{1}{2\pi} X * Y$
- Parseval: $\int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |X(\omega)|^2 d\omega$

常用变换对: $\delta(t) \leftrightarrow 1$; $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$; $e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 。

为什么需要采样定理

振动测试中，模拟信号 $x(t)$ 通过 A/D 转换变为离散信号 $x[n]$ 。**核心问题**：能否由 $x[n]$ 完整重建 $x(t)$ ？

- 采样间隔 T ，采样频率 $f_s = 1/T$ ，角采样频率 $\omega_s = 2\pi/T$ ；
- 采样过程在时域上是 $x(t)$ 与冲激串 $\delta_T(t)$ 相乘；
- 在频域上对应 $X(\omega)$ 以 ω_s 为周期的**周期延拓**：

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

为什么需要采样定理

振动测试中，模拟信号 $x(t)$ 通过 A/D 转换变为离散信号 $x[n]$ 。**核心问题**：能否由 $x[n]$ 完整重建 $x(t)$ ？

- 采样间隔 T ，采样频率 $f_s = 1/T$ ，角采样频率 $\omega_s = 2\pi/T$ ；
- 采样过程在时域上是 $x(t)$ 与冲激串 $\delta_T(t)$ 相乘；
- 在频域上对应 $X(\omega)$ 以 ω_s 为周期的**周期延拓**：

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$$

若采样频率不够高，相邻周期的频谱将发生**混叠** (aliasing)，无法恢复原信号。

奈奎斯特-香农采样定理

采样定理

对于带限信号 $x(t)$, 频谱 $X(\omega) = 0, \forall |\omega| > \omega_B$, 通过采样信号 $x[n]$ 重建原信号的**充分条件**为:

$$\omega_s > 2\omega_B, \quad \text{或} \quad f_s > 2f_B$$

奈奎斯特-香农采样定理

采样定理

对于带限信号 $x(t)$, 频谱 $X(\omega) = 0, \forall |\omega| > \omega_B$, 通过采样信号 $x[n]$ 重建原信号的**充分条件**为:

$$\omega_s > 2\omega_B, \quad \text{或} \quad f_s > 2f_B$$

- ω_B (f_B) 称为**奈奎斯特频率**;
- $2\omega_B$ ($2f_B$) 称为**奈奎斯特速率**;
- 实际工程中通常取 $f_s = (2.5 \sim 4)f_B$ 以留有余量。

反例: $f_s = 2f$ 时无法唯一确定振幅和相位; $f_s < 2f$ 时高频与低频成分无法区分 (**频率混叠**)。

时域信号重构——sinc 插值

采样定理满足时，通过理想低通滤波器可重建信号：

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

时域信号重构——sinc 插值

采样定理满足时，通过理想低通滤波器可重建信号：

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

其 Fourier 逆变换为

$$h(t) = \text{sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

时域信号重构——sinc 插值

采样定理满足时，通过理想低通滤波器可重建信号：

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_s/2 \end{cases}$$

其 Fourier 逆变换为

$$h(t) = \text{sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

重构公式 (**sinc 插值**):

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right)$$

各采样点处 $\text{sinc}(t/T - n)$ 在该点为 1，其余采样点为 0；采样点之间的数值由插值函数加权叠加得到。

实际信号往往**并非带限** (或含宽带噪声), 需在 A/D 转换前进行低通滤波。

- **理想低通滤波器**: 截止频率 $\omega_c \leq \pi/T = \omega_s/2$, 物理上不可实现 (不满足因果性);
- **RC 低通滤波器**: 截止频率 $\omega_c = 1/(RC)$,

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \phi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

缺点: 群延迟随频率变化, 造成**波形畸变**。

- **Bessel 低通滤波器**: 通带内群延迟近似平坦, **时域波形保真度高**。

截止频率定义: $|H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$ (即 -3 dB, 对应功率衰减 50%)。

频谱泄漏与加窗函数

DFT 隐含假设信号在采样窗口内**一个完整周期**，并在时域无限重复。

- 若 f_0 不是 f_s/N 的整数倍 $\Rightarrow$ 采样窗口非整周期 $\Rightarrow$ **频谱泄漏**：能量从主频“泄漏”到相邻频率，主瓣变宽、出现旁瓣。
- **加窗函数**：用窗函数 $w[n]$ 乘以信号以减小窗口边界的不连续性。

常见窗函数比较

窗类型	主瓣宽度	旁瓣衰减
矩形窗	最窄	最差 (约 -13 dB)
汉宁窗 (Hanning)	较宽	较好 (约 -32 dB)
汉明窗 (Hamming)	较宽	较好 (约 -43 dB)
布莱克曼 (Blackman)	最宽	最好 (约 -58 dB)

权衡：主瓣宽度（频率分辨率）与旁瓣衰减（泄漏抑制）。

例题 1：采样与重构

题目

某结构振动信号的有效带宽最高为 25 Hz。

1. 采样频率至少为多少才能保证不发生混叠？
2. 现场环境噪声中混入 30 Hz 高频干扰成分。若直接采用 $f_s = 40$ Hz 采样**且未加抗混叠滤波器**，该干扰会被混叠到哪个频率？
3. 写出由 $x[n]$ 重建 $x(t)$ 的 sinc 插值公式。

例题 1：采样与重构

题目

某结构振动信号的有效带宽最高为 25 Hz。

1. 采样频率至少为多少才能保证不发生混叠？
2. 现场环境噪声中混入 30 Hz 高频干扰成分。若直接采用 $f_s = 40$ Hz 采样**且未加抗混叠滤波器**，该干扰会被混叠到哪个频率？
3. 写出由 $x[n]$ 重建 $x(t)$ 的 sinc 插值公式。

参考答案

1. $f_s > 2 \times 25 = 50$ Hz。
2. 折叠频率 $|30 - 40| = 10$ Hz。此例说明实际信号需先经抗混叠滤波器滤除超过 $f_s/2$ 的噪声/干扰。
3. $x_r(t) = \sum_n x[n] \operatorname{sinc}(t/T - n), \quad T = 1/f_s = 0.025 \text{ s}.$

模态识别

N 自由度结构动力方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t)$$

结构动力方程与频响函数

N 自由度结构动力方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t)$$

对方程两边作 Fourier 变换, 得:

$$\mathbf{q}(\omega) = \underbrace{(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}}_{\mathbf{H}(\omega)} \mathbf{P}(\omega)$$

结构动力方程与频响函数

N 自由度结构动力方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t)$$

对方程两边作 Fourier 变换, 得:

$$\mathbf{q}(\omega) = \underbrace{(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}}_{\mathbf{H}(\omega)} \mathbf{P}(\omega)$$

频响函数 $\mathbf{H}(\omega) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 的物理意义:

- $H_{jk}(\omega)$: 在 k 自由度施加单位简谐荷载, j 自由度的稳态响应;
- **互易性**: $H_{jk}(\omega) = H_{kj}(\omega)$;
- 静态极限: $\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathbf{H}(\omega) = \mathbf{K}^{-1}$ (柔度矩阵)。

脉冲响应函数与频响函数

脉冲响应函数 $h(t)$: 系统对单位脉冲 $\delta(t)$ 的零状态响应。对任意输入 $p(t)$, 响应为卷积:

$$q(t) = h(t) * p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)p(\tau) d\tau$$

脉冲响应函数与频响函数

脉冲响应函数 $h(t)$: 系统对单位脉冲 $\delta(t)$ 的零状态响应。对任意输入 $p(t)$, 响应为卷积:

$$q(t) = h(t) * p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) p(\tau) d\tau$$

$h(t)$ 与 $H(\omega)$ 互为 Fourier 变换对

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

时域**卷积**与频域**乘积**对偶 (卷积定理):

$q(t) = h * p \iff q(\omega) = H(\omega)P(\omega)$ 。这是 ERA 与脉冲响应辨识的理论基础——**时域 $h(t)$ 与频域 $H(\omega)$ 含有等价的系统信息。**

频响函数的模态分解

当结构满足**比例阻尼**假设 $\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$ 且振型对质量矩阵归一化时：

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{-\omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2}$$

频响函数的模态分解

当结构满足**比例阻尼**假设 $\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K}$ 且振型对质量矩阵归一化时：

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_r \boldsymbol{\phi}_r^T}{-\omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2}$$

对于位移频响函数元素：

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{-\omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2}$$

频响函数的模态分解

当结构满足**比例阻尼**假设 $\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$ 且振型对质量矩阵归一化时：

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r \phi_r^T}{-\omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2}$$

对于位移频响函数元素：

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{-\omega^2 + i2\zeta_r \omega_r \omega + \omega_r^2}$$

加速度频响函数： $\mathbf{Z}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{H}(\omega)$ 。

- 高频成分被 ω^2 放大；
- 加速度频响函数峰值信息往往**比位移更丰富**。

峰值拾取法——基本思想

适用条件：**小阻尼、比例阻尼、模态分布稀疏**。在固有频率 ω_s 附近，
单模态主导：

$$H_{jk}(\omega_s) \approx \frac{\phi_{js}\phi_{ks}}{i2\zeta_s\omega_s^2} = -\frac{i\phi_{js}\phi_{ks}}{2\zeta_s\omega_s^2}$$

峰值拾取法——基本思想

适用条件：**小阻尼、比例阻尼、模态分布稀疏**。在固有频率 ω_s 附近，单模态主导：

$$H_{jk}(\omega_s) \approx \frac{\phi_{js}\phi_{ks}}{i2\zeta_s\omega_s^2} = -\frac{i\phi_{js}\phi_{ks}}{2\zeta_s\omega_s^2}$$

即频响函数矩阵的第 k 列在 $\omega = \omega_s$ 时与第 s 阶振型成正比：

$$\mathbf{H}_k(\omega_s) = -\frac{i\phi_{ks}}{2\zeta_s\omega_s^2}\phi_s$$

峰值拾取法——三大模态参数识别

1. 固有频率识别

检测频响函数幅频曲线 $|H_{kk}(\omega)|$ 的**局部极大值点**： ω_r 对应于 $\frac{d|H_{kk}(\omega)|}{d\omega} = 0$ 且二阶导数为负。

2. 振型提取

频响函数虚部之比即为振型：

$$\phi_{jr} = \frac{\text{Im}(H_{jk}(\omega_r))}{\text{Im}(H_{kk}(\omega_r))}$$

3. 阻尼比估算——半功率带宽法

$$|H_{kk}(\omega_a)| = |H_{kk}(\omega_b)| = \frac{|H_{kk}(\omega_r)|}{\sqrt{2}}$$

$$\zeta_r = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_r}$$

峰值拾取法——注意事项与局限性

- **密集模态**：频率分辨率不足时无法区分相邻模态；
- **非比例阻尼**：导致复模态，振型提取误差增大；
- **噪声敏感**：阻尼比估计尤其不准（试验值常远大于真实值）；
- **虚假模态**：通过限制阻尼比上限（如 $\zeta < 0.25$ ）剔除；
- 频率分辨率 $\Delta f = 1/T_w = f_s/N$ （二者等价，因 $T_w = NT = N/f_s$ ），由观测时间窗长度决定。

工程实践

- 优先选择**加载点频响函数** $H_{kk}(\omega)$ ，因为峰值更清晰；
- 当 $H_{kk}(\omega_r) \approx \phi_{kr}^2 / (2i\zeta_r \omega_r^2)$ ，振型分量与峰值幅值有关。

将结构二阶动力方程化为一阶状态方程：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_c \mathbf{x} + \mathbf{D}_c \mathbf{u}$$

其中

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix}$$

连续 $\rightarrow$ 离散 (采样周期 T):

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c d\tau$$

状态矩阵特征参数与结构模态

$\mathbf{A}_c$ 具有 N 个互为共轭的特征对, 第 j 阶特征值:

$$\lambda_j^c = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}$$

状态矩阵特征参数与结构模态

$\mathbf{A}_c$ 具有 N 个互为共轭的特征对, 第 j 阶特征值:

$$\lambda_j^c = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}$$

对应离散时间系统 $\mathbf{A}_d$ 的特征值:

$$\lambda_j^d = e^{\lambda_j^c T}$$

状态矩阵特征参数与结构模态

$\mathbf{A}_c$ 具有 N 个互为共轭的特征对, 第 j 阶特征值:

$$\lambda_j^c = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}$$

对应离散时间系统 $\mathbf{A}_d$ 的特征值:

$$\lambda_j^d = e^{\lambda_j^c T}$$

稳定性条件:

- 连续系统稳定: $\text{Re}(\lambda_j^c) < 0$;
- 离散系统稳定: $|\lambda_j^d| < 1$ (落在单位圆内);
- 左半平面 $\Leftrightarrow$ 单位圆内 (共形映射)。

比例阻尼时, 复模态 $\text{Im}(\bar{\mathbf{v}}_j^c) = \phi_j$ 即为实模态振型。

动态模态分解 (DMD)

适用场景：系统自由振动或冲激响应，观测全部状态。将观测的状态序列排列为两个数据矩阵：

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

动态模态分解 (DMD)

适用场景：系统自由振动或冲激响应，观测全部状态。将观测的状态序列排列为两个数据矩阵：

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

显然 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_0$ ，故 DMD 的核心是求解

$$\hat{\mathbf{A}}_d = \arg \min_{\mathbf{A}_d} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_d \mathbf{X}_0\|_F = \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_0^\dagger$$

动态模态分解 (DMD)

适用场景：系统自由振动或冲激响应，观测全部状态。将观测的状态序列排列为两个数据矩阵：

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix}$$

显然 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_0$ ，故 DMD 的核心是求解

$$\hat{\mathbf{A}}_d = \arg \min_{\mathbf{A}_d} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_d \mathbf{X}_0\|_F = \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_0^\dagger$$

对 $\hat{\mathbf{A}}_d$ 作特征值分解 $\hat{\mathbf{A}}_d \hat{\mathbf{V}}_d = \hat{\mathbf{V}}_d \hat{\mathbf{\Lambda}}_d$ ，得：

$$\hat{\lambda}_j^c = \frac{\ln \hat{\lambda}_j^d}{T}, \quad \hat{\omega}_j = |\hat{\lambda}_j^c|, \quad \hat{\zeta}_j = -\frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_j^c)}{\hat{\omega}_j}$$

特征系统实现算法 (ERA)

适用场景：系统受单位脉冲激励，输入输出已知。构造**Hankel 矩阵**（基于单位冲激响应序列 $\mathbf{h}_n$ ）：

$$\mathbf{H}_0 = \mathcal{O}_r \mathcal{C}_s, \quad \mathbf{H}_1 = \mathcal{O}_r \mathbf{A}_d \mathcal{C}_s$$

其中 $\mathcal{O}_r$ 为**可观测矩阵**， $\mathcal{C}_s$ 为**可控制矩阵**。对 $\mathbf{H}_0$ 作**奇异值分解 (SVD)** 并截断阶数 n_x ：

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \approx \mathbf{U}_{n_x} \mathbf{\Sigma}_{n_x} \mathbf{V}_{n_x}^T$$

得到系统矩阵的最小实现：

$$\hat{\mathbf{A}}_d = \mathbf{\Sigma}_{n_x}^{-1/2} \mathbf{U}_{n_x}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_{n_x} \mathbf{\Sigma}_{n_x}^{-1/2}$$

模态识别方法比较

方法对照

方法	数据要求	优缺点
峰值拾取	FRF(输入 + 输出)	简单直观; 小阻尼/稀疏模态/比例阻尼
DMD	状态全测、自由振动	数据驱动; 适合高维系统降维
ERA	冲激响应 (输入 + 输出)	严格的最小实现; 适合MIMO 系统

统一视角

都是求 $\mathbf{A}_d$ 的近似 $\Rightarrow$ 特征值分解 $\Rightarrow$ 模态参数:

$$\hat{\omega}_j = |\hat{\lambda}_j^c|, \quad \hat{\zeta}_j = -\frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_j^c)}{|\hat{\lambda}_j^c|}$$

例题 2：模态识别

题目

某单自由度系统 $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = p(t)$, $m = 2 \text{ kg}$ 、 $c = 0.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 、 $k = 200 \text{ N/m}$ 。

1. 求结构的固有圆频率 ω_n 、固有频率 f_n 和阻尼比 ζ 。
2. 若试验测得幅频曲线峰值位置 f_r 对应的两个半功率点为 $f_a = 1.55 \text{ Hz}$ 、 $f_b = 1.65 \text{ Hz}$ ，求阻尼比估计值并与理论值比较。

例题 2：模态识别

题目

某单自由度系统 $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = p(t)$, $m = 2 \text{ kg}$ 、 $c = 0.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 、 $k = 200 \text{ N/m}$ 。

1. 求结构的固有圆频率 ω_n 、固有频率 f_n 和阻尼比 ζ 。
2. 若试验测得幅频曲线峰值位置 f_r 对应的两个半功率点为 $f_a = 1.55 \text{ Hz}$ 、 $f_b = 1.65 \text{ Hz}$ ，求阻尼比估计值并与理论值比较。

参考答案

1. $\omega_n = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}$, $f_n = \omega_n/(2\pi) \approx 1.59 \text{ Hz}$;
 $\zeta = c/(2\sqrt{km}) = 0.4/(2\sqrt{400}) = 0.01$ 。
2. $f_r \approx 1.60 \text{ Hz}$, $\zeta_{\text{est}} = (f_b - f_a)/(2f_r) = 0.10/3.20 \approx 0.031$; 略偏大, 反映了半功率带宽法在低阻尼时易高估的特性。

卡尔曼滤波

为什么需要卡尔曼滤波

核心思想 (Kalman 1960): 融合**系统动力学模型**与**含噪观测**, 给出系统状态的最优递推估计。

- **递推**: 只需上一步结果与当前观测, 无需存储全部历史;
- **最优**: 线性高斯假设下, 最小均方误差 (MMSE) 估计;
- 提供估计的**不确定性** (协方差), 可量化置信度。

推导路线

最小二乘 $\rightarrow$ 递归最小二乘 (RLS) $\rightarrow$ 状态传递 $\rightarrow$ KF

最小二乘估计

线性观测系统:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_d \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

最小二乘估计

线性观测系统:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_d \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

最小化残差平方和:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$$

最小二乘估计

线性观测系统:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_d \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

最小化残差平方和:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$$

当 $\mathbf{C}_d$ 列满秩时:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}_d^T \mathbf{C}_d)^{-1} \mathbf{C}_d^T \mathbf{y} = \mathbf{C}_d^\dagger \mathbf{y}$$

最小二乘估计

线性观测系统:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_d \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

最小化残差平方和:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$$

当 $\mathbf{C}_d$ 列满秩时:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}_d^T \mathbf{C}_d)^{-1} \mathbf{C}_d^T \mathbf{y} = \mathbf{C}_d^\dagger \mathbf{y}$$

加权最小二乘 (各观测精度不同时, 权 = Σ_v^{-1}):

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}_d^T \Sigma_v^{-1} \mathbf{C}_d)^{-1} \mathbf{C}_d^T \Sigma_v^{-1} \mathbf{y}$$

噪声方差大的观测获得较小权重。

递归最小二乘 (RLS)

观测逐次到来，避免批量重算：

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{G}_n \underbrace{(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1})}_{\text{预测残差/innovation}}$$

递归最小二乘 (RLS)

观测逐次到来，避免批量重算：

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{G}_n \underbrace{(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1})}_{\text{预测残差/innovation}}$$

- 无偏性：仅需 $\mathbb{E}[\mathbf{v}_n] = \mathbf{0}$ 且初值无偏即可，与增益 $\mathbf{G}_n$ 无关；
- $\mathbf{G}_n$ 决定估计的方差。

递归最小二乘 (RLS)

观测逐次到来，避免批量重算：

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{G}_n \underbrace{(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1})}_{\text{预测残差/innovation}}$$

- 无偏性：仅需 $\mathbb{E}[\mathbf{v}_n] = \mathbf{0}$ 且初值无偏即可，**与增益 $\mathbf{G}_n$ 无关**；
- $\mathbf{G}_n$ 决定估计的**方差**。

以方差和 $J_n = \text{Tr}(\Sigma_n^x)$ 为目标，最小化得最优增益：

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n-1}^x \mathbf{C}_d^T (\mathbf{C}_d \Sigma_{n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v)^{-1}$$

递归最小二乘 (RLS)

观测逐次到来，避免批量重算：

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \mathbf{G}_n \underbrace{(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1})}_{\text{预测残差/innovation}}$$

- 无偏性：仅需 $\mathbb{E}[\mathbf{v}_n] = \mathbf{0}$ 且初值无偏即可，**与增益 $\mathbf{G}_n$ 无关**；
- $\mathbf{G}_n$ 决定估计的**方差**。

以方差和 $J_n = \text{Tr}(\Sigma_n^x)$ 为目标，最小化得最优增益：

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n-1}^x \mathbf{C}_d^T (\mathbf{C}_d \Sigma_{n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v)^{-1}$$

代入最优增益后，误差协方差递推可化简为：

$$\Sigma_n^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n-1}^x$$

线性时不变系统： $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}$ 。高斯保持性：线性变换保持高斯分布，故只需递推均值与协方差。

线性时不变系统: $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}$ 。 **高斯保持性**: 线性变换保持高斯分布, 故只需递推**均值**与**协方差**。

- 均值递推:

$$\boldsymbol{\mu}_n^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\mu}_{n-1}^{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1}$$

线性时不变系统： $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}$ 。高斯保持性：线性变换保持高斯分布，故只需递推**均值**与**协方差**。

- 均值递推：

$$\boldsymbol{\mu}_n^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\mu}_{n-1}^{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1}$$

- 协方差递推：

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\Sigma}_{n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}_d^T + \boldsymbol{\Sigma}_{n-1}^{\mathbf{w}}$$

物理意义：动力学传播原有不确定性，过程噪声持续注入新的不确定性。

离散卡尔曼滤波算法

系统: $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$ 初始化:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad \Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^T]$$

离散卡尔曼滤波算法

系统: $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$ 初始化:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad \Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^T]$$

预测 (时间更新)

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1}$$

$$\Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}_d^T + \Sigma_{n-1}^{\mathbf{w}}$$

离散卡尔曼滤波算法

系统: $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$ 初始化:

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0], \quad \Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^T]$$

预测 (时间更新)

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{n-1}$$

$$\Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_d \Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}_d^T + \Sigma_{n-1}^{\mathbf{w}}$$

校正 (测量更新)

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_d^T \left(\mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^{\mathbf{v}} \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{G}_n (\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})$$

$$\Sigma_{n|n}^{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}}$$

增益形式: $\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T (\mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v)^{-1}$ 。

- $\Sigma^v \rightarrow 0$ (观测准): $\mathbf{G}_n \mathbf{C}_d \rightarrow \mathbf{I}$, **高度信任观测**;
- $\Sigma^v \rightarrow \infty$ (观测差): $\mathbf{G}_n \rightarrow 0$, **依赖模型预测**;
- Σ^w 增大 $\Rightarrow$ 先验协方差大 $\Rightarrow$ 增益大 $\Rightarrow$ 更信任观测。

两种极端

- $\Sigma^w \gg \Sigma^v$: 响应快, 跟踪好, 但噪声大;
- $\Sigma^w \ll \Sigma^v$: 平滑, 但响应滞后。

KF 与 RLS 的关系: $\mathbf{A}_d = \mathbf{I}$ 、 $\mathbf{u}_n = 0$ 、 $\mathbf{w}_n = 0$ 时, KF 退化为 RLS。

扩展卡尔曼滤波 (EKF)

非线性系统:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}) + \mathbf{w}_{n-1}, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}_n$$

扩展卡尔曼滤波 (EKF)

非线性系统:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}) + \mathbf{w}_{n-1}, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}_n$$

核心思想: 在估计点附近作**一阶泰勒展开** (雅可比矩阵线性化):

$$\mathbf{F}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}}, \quad \mathbf{H}_n = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}}$$

套用标准 KF 方程, 将 $\mathbf{A}_d \rightarrow \mathbf{F}_n$ 、 $\mathbf{C}_d \rightarrow \mathbf{H}_n$ 。

局限

- 线性化误差大 (强非线性系统易发散);
- 需要解析雅可比矩阵;
- 不可微非线性 (如 Bouc-Wen) 不能直接用 EKF。

无迹卡尔曼滤波 (UKF)

避免显式求雅可比矩阵，使用**无迹变换 (UT)** 逼近非线性变换后的分布。

- 选取 $2n_x + 1$ 个**Sigma 点** $\mathcal{X}_i$ 及权重 W_i ;
- 通过非线性函数传递 $\mathcal{Y}_i = f(\mathcal{X}_i)$;
- 用加权统计量重构均值与协方差。

相比 EKF 的优势

- 无需解析雅可比矩阵 (适合复杂或不可微系统);
- 对均值的逼近精度达**二阶** (EKF 仅一阶);
- 在强非线性下精度显著优于 EKF (如 Bouc-Wen 滞回系统)。

例题 3：卡尔曼滤波

题目

考虑标量系统 $x_n = x_{n-1} + w_{n-1}$, $y_n = x_n + v_n$, $\sigma_w^2 = 0.01$, $\sigma_v^2 = 0.04$ 。初值 $\hat{x}_{0|0} = 0$, $\Sigma_{0|0}^x = 1$ 。

1. 计算 $\Sigma_{1|0}^x$ 、 G_1 、 $\Sigma_{1|1}^x$ 。
2. 若 $y_1 = 0.5$, 求 $\hat{x}_{1|1}$ 。
3. 分析当 σ_w^2 增大时, G_1 如何变化?

例题 3：卡尔曼滤波

题目

考虑标量系统 $x_n = x_{n-1} + w_{n-1}$, $y_n = x_n + v_n$, $\sigma_w^2 = 0.01$, $\sigma_v^2 = 0.04$ 。初值 $\hat{x}_{0|0} = 0$, $\Sigma_{0|0}^x = 1$ 。

1. 计算 $\Sigma_{1|0}^x$ 、 G_1 、 $\Sigma_{1|1}^x$ 。
2. 若 $y_1 = 0.5$, 求 $\hat{x}_{1|1}$ 。
3. 分析当 σ_w^2 增大时, G_1 如何变化?

参考答案

1. $\Sigma_{1|0}^x = 1 + 0.01 = 1.01$; $G_1 = 1.01/(1.01 + 0.04) \approx 0.9619$;
 $\Sigma_{1|1}^x = (1 - G_1)\Sigma_{1|0}^x \approx 0.0385$ 。
2. $\hat{x}_{1|1} = 0 + 0.9619 \times (0.5 - 0) \approx 0.481$ 。
3. σ_w^2 增大 $\Rightarrow \Sigma_{1|0}^x$ 增大 $\Rightarrow G_1$ 增大 (更信任观测)。

模型修正

模型修正：目标与基本流程

目标：调整数值模型参数 θ ，使模型预测与试验测量一致。

1. 建立初始数值模型，提取模型预测的动力特性；
2. 振动测试，识别结构的实测动力特性；
3. 定义**误差函数** $f(\theta)$ ，构建**优化问题**；
4. 迭代求解 $\theta^* = \arg \min_{\theta} f(\theta)$ ；
5. 验证修正后模型的预测精度。

反演问题的难点

- **病态：**测量信息有限时可能多解；
- **物理合理性：**需通过约束/正则化保证参数有意义；
- **灵敏度：**参数对响应的影响差异大。

参数化建模——两种方法

1. 直接参数化

以结构物理参数为待修正量：

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{K}_i^e(\boldsymbol{\theta})$$

例：两层剪切框架， θ_1, θ_2 为层间刚度：

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \theta_1 + \theta_2 & -\theta_2 \\ -\theta_2 & \theta_2 \end{pmatrix}$$

优点：物理意义明确； **适用：**初始模型差距较大时。

2. 相对参数化

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^{n_{\theta}} \theta_i \mathbf{K}_i$$

优点：参数为相对增量，便于设置约束； **适用：**初始模型接近真实结构时（如损伤识别）。

通过试验提取 ω_i^{EXP} 和 ϕ_i^{EXP} 。数值模型通过广义特征值问题求解：

$$(\mathbf{K}(\theta) - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0}$$

通过试验提取 ω_i^{EXP} 和 ϕ_i^{EXP} 。数值模型通过广义特征值问题求解：

$$(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0}$$

目标函数 (频率误差 + 振型误差)：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} f(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{mode}}} \left[\left(\frac{\omega_i^{\text{EXP}} - \omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\omega_i^{\text{EXP}}} \right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{\text{MAC}_i}}{\sqrt{\text{MAC}_i}} \right)^2 \right]$$

通过试验提取 ω_i^{EXP} 和 ϕ_i^{EXP} 。数值模型通过广义特征值问题求解：

$$(\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) - \omega_i^2 \mathbf{M}) \phi_i = \mathbf{0}$$

目标函数 (频率误差 + 振型误差)：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} f(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{mode}}} \left[\left(\frac{\omega_i^{\text{EXP}} - \omega_i(\boldsymbol{\theta})}{\omega_i^{\text{EXP}}} \right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{\text{MAC}_i}}{\sqrt{\text{MAC}_i}} \right)^2 \right]$$

MAC (模态保证准则)：

$$\text{MAC}_i = \frac{|(\phi_i^{\text{EXP}})^T \phi_i^{\mathcal{M}}(\boldsymbol{\theta})|^2}{(\phi_i^{\text{EXP}})^T \phi_i^{\text{EXP}} \cdot (\phi_i^{\mathcal{M}})^T \phi_i^{\mathcal{M}}}$$

$\text{MAC} \in [0, 1]$ ：1 表示振型完全一致；0 表示正交。

将结构参数 θ 与系统状态联合识别，构造**扩展状态向量**：

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \theta \end{pmatrix}$$

将结构参数 θ 与系统状态联合识别，构造**扩展状态向量**：

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \theta \end{pmatrix}$$

动力学方程：

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_c(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{B}_c(\theta)\mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_\theta \end{pmatrix}$$

$\mathbf{w}_\theta$ 为**人工参数噪声**，反映对参数变化的先验假设。

扩展系统是非线性的！

即使原系统线性，由于 $\mathbf{A}_c$ 是 θ 的函数，扩展系统**必须**使用**EKF/UKF**求解。

人工参数噪声的设置策略

w_θ 控制参数更新的灵活性，影响：

- **收敛速度**： w_θ 大 $\Rightarrow$ 收敛快；
- **稳态精度**： w_θ 大 $\Rightarrow$ 稳态波动大；
- **跟踪能力**： w_θ 大 $\Rightarrow$ 跟踪时变参数更敏感。

三者存在矛盾，需根据应用场景权衡。

常用策略

- **固定值**：取真值的 1% ~ 10%；
- **衰减噪声**： $\Sigma_n^\theta = e^{-\alpha n} \Sigma_0^\theta$ ，结合快收敛与高精度；
- **参数差异化**：高敏感度参数用小噪声，低敏感度用大噪声；
- **自适应**：根据残差变化动态调整。

结构参数常有物理意义约束（如 $\theta > 0$ ）。

1. 参数变换法

- 正值约束: $\theta = e^\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$, $d\theta/d\eta = e^\eta$;
- 区间约束 $a < \theta < b$: Sigmoid 变换 $\theta = a + (b - a)/(1 + e^{-\eta})$;
- 相关约束 $\theta_1 > \theta_2$: 差异参数化 $\theta_2 = \theta_1 - e^\phi$ 。

2. 投影法

每次更新后将参数投影回可行域。简单但可能产生偏差。

3. 惩罚函数法

在目标函数中添加惩罚项 $\phi(\theta)$ 作为虚拟测量。

优化算法——梯度下降

迭代格式: $\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} + t^{(n)} \Delta \theta^{(n)}$ **梯度下降**: 搜索方向

$\Delta \theta^{(n)} = -\nabla f(\theta^{(n)})$ **回溯线搜索** (Armijo 准则确定步长 $t^{(n)}$):

$$f(\theta^{(n)} + t\Delta\theta) \leq f(\theta^{(n)}) + \alpha t \nabla f^T \Delta\theta$$

- $\alpha \in (0.01, 0.3)$: 接受的下降比例;
- $\beta \in (0.1, 0.8)$: 步长缩减因子。

特点: 实现简单, 但收敛慢 (线性收敛)。

优化算法——牛顿法与拟牛顿法

牛顿法

$$\boldsymbol{\theta}^{(n+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(n)} - \left(\nabla^2 f(\boldsymbol{\theta}^{(n)}) \right)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{\theta}^{(n)})$$

二阶收敛（最优解附近），但需计算/存储海森矩阵。

高斯-牛顿法

专用于最小二乘 $f(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})\|_2^2$ 。忽略海森的二阶项：

$$\nabla^2 f \approx D\mathbf{r}^T D\mathbf{r}$$

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{\text{GN}}^{(n)} = -(D\mathbf{r}^T D\mathbf{r})^{-1} D\mathbf{r}^T \mathbf{r}$$

LM 法（列文伯格-马夸尔特）

$$\Delta \boldsymbol{\theta}_{\text{LM}}^{(n)} = -(D\mathbf{r}^T D\mathbf{r} + \lambda^{(n)} \mathbf{I})^{-1} D\mathbf{r}^T \mathbf{r}$$

λ 自适应：函数值下降 $\Rightarrow$ 减小 λ (近 GN)；上升 $\Rightarrow$ 增大 λ (近梯度)。

参数 θ 变化时, 数值模态**顺序可能改变**, 简单按序号匹配会出错。

基于 MAC 值的匹配

$$j^* = \arg \max_j \text{MAC}(\phi_i^{\text{EXP}}, \phi_j^{\text{M}})$$

依赖振型相似性, 密集模态时可能误匹配。

频率-振型综合匹配

$$j^* = \arg \min_j \left\{ \alpha \left| \frac{\omega_i^{\text{EXP}} - \omega_j(\theta)}{\omega_i^{\text{EXP}}} \right| + (1 - \alpha)(1 - \text{MAC}) \right\}$$

通过权重 α 平衡频率与振型重要性。

匹配关系 $\pi(i)$ 在每次参数更新后需**重新评估**。

例题 4：模型修正

题目

二层剪切框架结构，质量 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ，初始刚度 $k_1^{(0)} = k_2^{(0)} = 100 \text{ N/m}$ 。试验得第一阶 $\omega_1^{\text{EXP}} = 5.5 \text{ rad/s}$ ，模型 $\omega_1^{\text{FEM}} = 6.18 \text{ rad/s}$ 。

1. 写出直接参数化下的刚度矩阵；
2. 频率误差表明刚度应**增大**还是**减小**？
3. 用 $\text{MAC} = 0.95$ 衡量振型，频率误差权 0.5，写出目标函数。

例题 4：模型修正

题目

二层剪切框架结构，质量 $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ ，初始刚度 $k_1^{(0)} = k_2^{(0)} = 100 \text{ N/m}$ 。试验得第一阶 $\omega_1^{\text{EXP}} = 5.5 \text{ rad/s}$ ，模型 $\omega_1^{\text{FEM}} = 6.18 \text{ rad/s}$ 。

1. 写出直接参数化下的刚度矩阵；
2. 频率误差表明刚度应**增大**还是**减小**？
3. 用 $\text{MAC} = 0.95$ 衡量振型，频率误差权 0.5，写出目标函数。

参考答案

1. $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$
2. $\omega^{\text{EXP}} < \omega^{\text{FEM}} \Rightarrow$ 模型**高估刚度**，应**减小** k_i 。
3. $f = 0.5 \times (1 - 5.5/6.18)^2 + 0.5 \times ((1 - \sqrt{0.95})/\sqrt{0.95})^2 \approx 0.006 + 0.0007$ 。

综合习题与小结

重点知识脉络回顾

信号采集

采样定理 ($f_s > 2f_B$) → 频谱周期延拓 → 混叠 → 抗混叠滤波器 (Bessel) → 重构 (sinc 插值); DFT 频谱泄漏/加窗

模态识别

动力方程 → FRF → 模态分解 → 峰值拾取 (固有频率/振型/半功率带宽); 状态空间 → A_d 特征参数 → DMD/ERA

卡尔曼滤波

LS → WLS → RLS (无偏 + 最优增益) → 状态传递 → KF (预测 + 校正) → EKF/UKF

模型修正

参数化建模 → 目标函数 (MAC) → 优化算法 (GD/N/GN/LM) → 模态匹配 → EKF/UKF 时域修正

综合题

对一个 4 层剪切框架结构进行振动测试：

1. 采集器最高分析频率 25 Hz，采样频率应至少多少？为何工程上常取 $f_s = 100$ Hz？
2. 用峰值拾取法识别模态参数时，加速度频响函数与位移频响函数相比，哪个更适合识别高阶模态？为何？
3. 用峰值拾取法识别前三阶固有频率分别为 2.1, 6.0, 9.5 Hz，若实验显示 $MAC_1 = 0.97$ ，模型计算第一阶 2.4 Hz，模型刚度需如何调整？
4. 若结构出现**时变刚度**（如逐步损伤），EKF/UKF 算法层面应如何处理？

综合复习题 1 (参考答案)

1. $f_s > 2 \times 25 = 50 \text{ Hz}$ 。工程取 100 Hz 是因为：(i) 留 2 倍余量以便抗混叠滤波器设计（其过渡带较宽）；(ii) 高采样率有利于时域波形保真。
2. 加速度更适合：由 $\mathbf{Z}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{H}(\omega)$ ，高频成分被 ω^2 **放大**，因此加速度 FRF 在高阶模态处峰值更显著，而位移 FRF 高频被 $1/\omega^2$ 压制、峰值不明显。
3. $\omega^{\text{EXP}} < \omega^{\text{FEM}} \Rightarrow$ 模型高估刚度（由 $\omega^2 = k/m$ 可见），应**减小**相关层刚度参数。 $\text{MAC}_1 = 0.97$ 表明振型匹配良好，主要修正方向是频率。
4. **人为增大参数误差协方差**（即增大人工参数噪声 $\mathbf{w}_\theta$ 的方差 $\Sigma^{\mathbf{w}_\theta}$ ）。原理：参数误差协方差 Σ^θ 大 $\Rightarrow$ 增益 G_n 大 $\Rightarrow$ 滤波器更信任最新观测、放弃旧的参数估计 $\Rightarrow$ 跟踪能力增强。代价是稳态精度下降，故可在检测到残差突增时**动态增大**噪声协方差，稳态时再恢复较小值。

综合题

单自由度系统 $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = w(t)$, $m = 1 \text{ kg}$ 、 $k = 100 \text{ N/m}$ 、 $c = 0.4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。仅测加速度。

1. 写出连续状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c \mathbf{x} + \mathbf{B}_c w$, 确定 $\mathbf{C}_c$ 。
2. 求 $\mathbf{A}_c$ 的特征值, 验证 ω_n 和 ζ 。
3. 用 $T = 0.05 \text{ s}$ 离散化, 写出 KF 的初始化与迭代步骤。
4. 若过程噪声 $\sigma_w = 0.1$ 、观测噪声 $\sigma_v = 0.05$, 稳态卡尔曼增益的方向 (更信任观测/模型)?

综合复习题 2 (参考答案 1/2)

(1) 取 $\mathbf{x} = (q, \dot{q})^T$ 。由 $\ddot{q} = -kq/m - c\dot{q}/m + w/m$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0.4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

仅测加速度 $y = \ddot{q} = -kq/m - c\dot{q}/m + w/m$, 故 $\mathbf{C}_c = (-100, -0.4)$ 。

综合复习题 2 (参考答案 1/2)

(1) 取 $\mathbf{x} = (q, \dot{q})^T$ 。由 $\ddot{q} = -kq/m - c\dot{q}/m + w/m$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0.4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w$$

仅测加速度 $y = \ddot{q} = -kq/m - c\dot{q}/m + w/m$, 故 $\mathbf{C}_c = (-100, -0.4)$ 。

(2) 特征方程 $\det(\mathbf{A}_c - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 0.4\lambda + 100 = 0$, 判别式

$0.4^2 - 4 \times 100 = -399.84 < 0$, 故

$$\lambda^c = \frac{-0.4 \pm \sqrt{-399.84}}{2} = -0.2 \pm 9.998 i$$

比较 $\lambda^c = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$: $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 9.998$, $\zeta\omega_n = 0.2$; 解得 $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$, $\zeta = 0.02$ 。✓

综合复习题 2 (参考答案 2/2)

(3) 离散化 ($T = 0.05$ s): $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T}$, $\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c d\tau$ 。KF 流程:

- **初始化**: $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$, $\Sigma_{0|0}^x$
- **预测**: $\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$, $\Sigma_{n|n-1}^x = \mathbf{A}_d \Sigma_{n-1|n-1}^x \mathbf{A}_d^T + \Sigma^w$
- **增益**: $\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_c^T (\mathbf{C}_c \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_c^T + \sigma_v^2)^{-1}$
- **校正**: $\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{G}_n (y_n - \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})$,
 $\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_c) \Sigma_{n|n-1}^x$

(4) $\sigma_w / \sigma_v = 0.1 / 0.05 = 2$ 。过程噪声大于观测噪声 $\Rightarrow$ 先验协方差 $\Sigma_{n|n-1}^x$ 增长快 $\Rightarrow$ 增益 $\mathbf{G}_n$ 偏大 $\Rightarrow$ **更信任观测**。

综合复习题 3：信号采样与重构

综合题

某带限振动信号 $x(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 3t) + \sin(2\pi \cdot 7t)$ (单位: m)。

1. 求 $x(t)$ 的奈奎斯特速率, 并判断 $f_s = 16 \text{ Hz}$ 是否满足采样定理;
2. 取 $f_s = 16 \text{ Hz}$ 、 $N = 64$, 计算频率分辨率 Δf ;
3. 若实测中混入 11 Hz 环境干扰 (未加抗混叠滤波器), 采样后将出现在哪个频率? 为避免应如何处理?

综合复习题 3 (参考答案)

(1) 信号最高频率 $f_B = 7 \text{ Hz}$, 奈奎斯特速率 $= 2f_B = 14 \text{ Hz}$ 。
 $f_s = 16 > 14$, **满足**采样定理。✓

(2) 频率分辨率

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{16}{64} = 0.25 \text{ Hz}$$

(等价地, $\Delta f = 1/T_w = 1/(N \cdot T) = 1/(64 \times 1/16) = 0.25 \text{ Hz}$)。

(3) $11 \text{ Hz} > f_s/2 = 8 \text{ Hz}$, 发生混叠。折叠频率 $= |11 - 16| = 5 \text{ Hz}$ (关于 $f_s/2 = 8 \text{ Hz}$ 对称: $8 - 3 = 5$)。**避免方法**: A/D 前加低通滤波器, 截止频率取 $f_c < 8 \text{ Hz}$ (例如 7.5 Hz , 留过渡带余量)。

综合复习题 4：多自由度模态识别

综合题

考虑二自由度结构 $\mathbf{M} = \text{diag}(1, 1) \text{ kg}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ N/m}$, 无阻尼。

1. 求两阶固有圆频率 ω_1, ω_2 ;
2. 求归一化振型 ϕ_1, ϕ_2 (按第 2 自由度归一为 1);
3. 验证振型对质量矩阵的正交性 $\phi_1^T \mathbf{M} \phi_2$ 。

综合复习题 4 (参考答案 1/2)

(1) 广义特征值问题 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}$ 。特征方程：

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - \omega^2 \end{pmatrix} = (3 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1 = 0$$

综合复习题 4 (参考答案 1/2)

(1) 广义特征值问题 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}$ 。特征方程:

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - \omega^2 \end{pmatrix} = (3 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1 = 0$$

展开: $\omega^4 - 4\omega^2 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega^2 + 2 = 0$ 。令 $u = \omega^2$, 解 $u^2 - 4u + 2 = 0$:

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\omega_1^2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858, \quad \omega_2^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142;$$

$$\omega_1 \approx 0.7654 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 \approx 1.8478 \text{ rad/s}$$

综合复习题 4 (参考答案 1/2)

(1) 广义特征值问题 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0}$ 。特征方程:

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - \omega^2 \end{pmatrix} = (3 - \omega^2)(1 - \omega^2) - 1 = 0$$

展开: $\omega^4 - 4\omega^2 + 3 - 1 = 0 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega^2 + 2 = 0$ 。令 $u = \omega^2$, 解 $u^2 - 4u + 2 = 0$:

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\omega_1^2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.5858, \quad \omega_2^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142;$$

$$\omega_1 \approx 0.7654 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 \approx 1.8478 \text{ rad/s}$$

(2) 由第一行 $(3 - \omega^2)\phi_1 - \phi_2 = 0$, 即 $\phi_2 = (3 - \omega^2)\phi_1$ 。

归一化令 $\phi_2 = 1$, 则 $\phi_1 = 1/(3 - \omega^2)$ 。

- $\omega_1^2 \approx 0.5858$: $\phi_{11} = 1/(3 - 0.5858) = 1/2.4142 \approx 0.4142$
 $\Rightarrow \phi_1 \approx (0.4142, 1)^T$
- $\omega_2^2 \approx 3.4142$: $\phi_{12} = 1/(3 - 3.4142) = 1/(-0.4142) \approx -2.4142$
 $\Rightarrow \phi_2 \approx (-2.4142, 1)^T$

(3) 验证质量正交性：

$$\begin{aligned}\phi_1^T \mathbf{M} \phi_2 &= (0.4142, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2.4142 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.4142 \times (-2.4142) + 1 \times 1 \\ &= -1.0000 + 1 = 0 \checkmark\end{aligned}$$

事实上由代数恒等式 $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ 严格为零。这说明：在比例阻尼（或无阻尼）下，模态振型对质量矩阵正交是**结构动力学的基本性质**，也是模态分解能解耦多自由度系统的根本原因。

综合复习题 5: EKF 时域参数识别

综合题

某单自由度系统 $m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = u(t)$, $m = 1 \text{ kg}$ (已知), c, k 为待识别参数。仅测加速度 $y_n = \ddot{q}_n + v_n$ 。

1. 构造扩展状态向量 $\mathbf{z} = (q, \dot{q}, c, k)^T$, 写出连续时间扩展状态方程 $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, u) + \tilde{\mathbf{w}}$;
2. 写出观测方程, 并求出观测函数 $\mathbf{h}(\mathbf{z})$;
3. 求扩展状态方程的雅可比矩阵 $\mathbf{F} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$;
4. 若初值 $\hat{c}_0 = 0.5$, $\hat{k}_0 = 50$, 真值 $c = 0.4$, $k = 100$, 人工参数噪声 $\sigma_{w_c}^2 = \sigma_{w_k}^2 = 10^{-4}$ 。定性分析: 能否在 EKF 中同时识别 c 和 k ? 哪个参数更易识别? 为何?

综合复习题 5 (参考答案 1/2)

(1) 令 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = (q, \dot{q}, c, k)^T$ 。由 $m\ddot{q} = -c\dot{q} - kq + u$ 即 $\ddot{q} = (u - z_3 z_2 - z_4 z_1)/m$, 且参数视为缓变常量 $\dot{c} = \dot{k} = 0$ (加人工噪声):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, u) + \tilde{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}, u) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -(z_3 z_2 + z_4 z_1)/m + u/m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{w}} = (0, w, w_c, w_k)^T$, w_c, w_k 为人工参数噪声。

综合复习题 5 (参考答案 1/2)

(1) 令 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = (q, \dot{q}, c, k)^T$ 。由 $m\ddot{q} = -c\dot{q} - kq + u$ 即 $\ddot{q} = (u - z_3 z_2 - z_4 z_1)/m$, 且参数视为缓变常量 $\dot{c} = \dot{k} = 0$ (加人工噪声):

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, u) + \tilde{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}, u) = \begin{pmatrix} z_2 \\ -(z_3 z_2 + z_4 z_1)/m + u/m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{w}} = (0, w, w_c, w_k)^T$, w_c, w_k 为人工参数噪声。

(2) 由系统方程, $\ddot{q} = -(c\dot{q} + kq)/m + u/m$ 。代入扩展状态:

$$y_n = \ddot{q}_n + v_n \Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{z}) = -\frac{z_3 z_2 + z_4 z_1}{m} + \frac{u}{m}$$

观测函数对 $\mathbf{z}$ **非线性** (含 $z_3 z_2$ 和 $z_4 z_1$ 乘积项)。

综合复习题 5 (参考答案 2/2)

(3) 逐项求偏导:

- $\partial f_1 / \partial \mathbf{z} = (0, 1, 0, 0)$
- $\partial f_2 / \partial \mathbf{z} = (-z_4/m, -z_3/m, -z_2/m, -z_1/m)$
- $\partial f_3 / \partial \mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$ ($\dot{c}$ 不依赖状态)
- $\partial f_4 / \partial \mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$

代入 $m = 1$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -z_4 & -z_3 & -z_2 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意第 2 行第 3、4 列 $-z_2, -z_1$ 体现**状态与参数的耦合**, 是 EKF 能识别 c, k 的关键。

(4) 可同时识别。 **k 比 c 易识别**: (i) $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 对 k 强敏感 (一阶关系); (ii) c 主导幅值衰减, 小阻尼时观测信号衰减慢、信息少; (iii) 雅可比 $\mathbf{F}_{2,3} = -z_2 = -\dot{q}$, 振动幅值越大对 c 的识别能力越强, 故**大振幅激励**更有利于阻尼识别。

准备要点

1. **概念清晰**: 采样定理、混叠、抗混叠滤波、半功率带宽、MAC、Kalman 增益等核心概念。
2. **推导熟练**: FRF 模态分解、卡尔曼增益最优性、参数化刚度矩阵。
3. **物理直觉**: 噪声权衡 (观测 vs 模型)、参数化方法选择、优化算法适用范围。
4. **计算训练**: 单/两自由度系统的 ω_n, ζ 计算、状态矩阵特征值、KF 迭代一步。

期末考试

- 概念题答到**物理意义**和**适用条件**;
- 计算题分步骤写公式、代数化简、给数值结果 (带单位);
- 涉及矩阵的题, 先写出符号化表达式再代入。

祝考试顺利!

振动测试分析

2026年6月15日