

基于 EKF 与 UKF 的模型修正

时域响应识别与频域模态残差类比修正

李丹

2026 年 6 月 8 日

从滤波到模型修正

时域模型修正-时域响应识别

频域类比修正-模态残差伪观测

EKF 频域类比修正

UKF 频域类比修正

约束、正则化与协方差膨胀

比较、流程与选用

小结

从滤波到模型修正

工程结构的有限元模型通常写成

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}(t) + \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示**待修正参数**，例如各层刚度、阻尼、连接刚度或损伤系数； $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ 是可能存在的非线性恢复力（如滞回项）。

工程结构的有限元模型通常写成

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}(t) + \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示**待修正参数**，例如各层刚度、阻尼、连接刚度或损伤系数； $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ 是可能存在的非线性恢复力（如滞回项）。

模型修正的目标

利用试验或监测数据反推 $\boldsymbol{\theta}$ ，使数值模型与真实结构在关键动力特性上**尽可能一致**。

模型修正可以来自两类数据：

工程结构的有限元模型通常写成

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}(t) + \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示**待修正参数**，例如各层刚度、阻尼、连接刚度或损伤系数； $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ 是可能存在的非线性恢复力（如滞回项）。

模型修正的目标

利用试验或监测数据反推 $\boldsymbol{\theta}$ ，使数值模型与真实结构在关键动力特性上 **尽可能一致**。

模型修正可以来自两类数据：

- **时域数据**：地面加速度输入与楼层响应输出，在线识别位移、速度和刚度；
- **频域数据**：频率、振型等模态参数，构造残差后做类比的递推修正。

工程结构的有限元模型通常写成

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}(t) + \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \mathbf{f}(t)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示**待修正参数**，例如各层刚度、阻尼、连接刚度或损伤系数； $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ 是可能存在的非线性恢复力（如滞回项）。

模型修正的目标

利用试验或监测数据反推 $\boldsymbol{\theta}$ ，使数值模型与真实结构在关键动力特性上**尽可能一致**。

模型修正可以来自两类数据：

- **时域数据**：地面加速度输入与楼层响应输出，在线识别位移、速度和刚度；
- **频域数据**：频率、振型等模态参数，构造残差后做类比的递推修正。

问题本质：无论时域还是频域，观测量都是待修正参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的非线性函数。

时域响应识别

- 增广状态含 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}$;
- 输入为地面加速度 $a_g(t)$;
- 观测为楼层加速度等传感器数据;
- 是标准的非线性状态估计问题。

两条滤波式模型修正路线

时域响应识别

- 增广状态含 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \theta$;
- 输入为地面加速度 $a_g(t)$;
- 观测为楼层加速度等传感器数据;
- 是标准的非线性状态估计问题。

频域类比修正

- 状态只取待修正参数 θ ;
- 观测写成 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\theta) + \mathbf{v}$;
- 类比零残差的测量更新;
- 适合把已有频域修正程序滤波化。

两条滤波式模型修正路线

时域响应识别

- 增广状态含 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}$;
- 输入为地面加速度 $a_g(t)$;
- 观测为楼层加速度等传感器数据;
- 是标准的非线性状态估计问题。

频域类比修正

- 状态只取待修正参数 $\boldsymbol{\theta}$;
- 观测写成 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}$;
- 类比零残差的测量更新;
- 适合把已有频域修正程序滤波化。

关键转换

把未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 看成**状态**，并用协方差描述不确定性：

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{w}})$$

EKF 用 Jacobian 传播协方差，UKF 用 sigma 点传播协方差。

时域模型修正-时域响应识别

四层结构在 El Centro 地震输入下的时程数据：

四层结构在 El Centro 地震输入下的时程数据：

变量	维数	用途
groundAcc	1×10000	地面加速度输入 $a_{g,k}$
relFloorAcc	4×10000	四层相对楼层加速度量测 y_k
T	1×1	采样间隔 $\Delta t = 0.005 \text{ s}$

四层结构在 El Centro 地震输入下的时程数据:

变量	维数	用途
groundAcc	1×10000	地面加速度输入 $a_{g,k}$
relFloorAcc	4×10000	四层相对楼层加速度量测 y_k
T	1×1	采样间隔 $\Delta t = 0.005 \text{ s}$

时域识别的目标

已知地震输入 $a_{g,k}$ 与楼层响应 y_k , 递推估计结构状态与**待修正参数**:

$$\mathbf{q}_k, \quad \dot{\mathbf{q}}_k, \quad \boldsymbol{\theta}_k = [\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}, \theta_{4,k}]^T$$

其中各层刚度由相对修正系数表示 $k_s(\theta_s) = k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s)$, 与频域修正使用**同一套参数** θ 。

四层结构在 El Centro 地震输入下的时程数据:

变量	维数	用途
groundAcc	1×10000	地面加速度输入 $a_{g,k}$
relFloorAcc	4×10000	四层相对楼层加速度量测 y_k
T	1×1	采样间隔 $\Delta t = 0.005 \text{ s}$

时域识别的目标

已知地震输入 $a_{g,k}$ 与楼层响应 y_k , 递推估计结构状态与**待修正参数**:

$$\mathbf{q}_k, \quad \dot{\mathbf{q}}_k, \quad \boldsymbol{\theta}_k = [\theta_{1,k}, \theta_{2,k}, \theta_{3,k}, \theta_{4,k}]^T$$

其中各层刚度由相对修正系数表示 $k_s(\theta_s) = k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s)$, 与频域修正使用**同一套参数** θ 。

状态估计问题: 位移、速度不可直接全量测, 参数 θ 更是未知, 三者一起进入滤波器。

四层剪切框架的相对位移满足

增广状态-位移、速度、参数

四层剪切框架的相对位移满足

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{q}_k = -\mathbf{M}\mathbf{1} a_{g,k}$$

取增广状态为

增广状态-位移、速度、参数

四层剪切框架的相对位移满足

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{q}_k = -\mathbf{M}\mathbf{1} a_{g,k}$$

取增广状态为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \quad \boldsymbol{\theta}_k = [\theta_{1,k}, \dots, \theta_{4,k}]^T$$

则连续状态方程可写成

增广状态-位移、速度、参数

四层剪切框架的相对位移满足

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{q}_k = -\mathbf{M}\mathbf{1}a_{g,k}$$

取增广状态为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \quad \boldsymbol{\theta}_k = [\theta_{1,k}, \dots, \theta_{4,k}]^T$$

则连续状态方程可写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{1}a_g) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{w}$$

离散滤波时用数值积分 (Euler、Newmark 或 RK4) 得到

增广状态-位移、速度、参数

四层剪切框架的相对位移满足

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{q}_k = -\mathbf{M}\mathbf{1}a_{g,k}$$

取增广状态为

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_k \\ \boldsymbol{\theta}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \quad \boldsymbol{\theta}_k = [\theta_{1,k}, \dots, \theta_{4,k}]^T$$

则连续状态方程可写成

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{1}a_g) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{w}$$

离散滤波时用数值积分 (Euler、Newmark 或 RK4) 得到

观测方程：由状态预测楼层加速度

若 `relFloorAcc` 作为相对楼层加速度量测，则

观测方程：由状态预测楼层加速度

若 relFloorAcc 作为相对楼层加速度量测，则

$$y_k = h(\mathbf{x}_k, a_{g,k}, \mathbf{v}_k) = \mathbf{\Gamma} \left[-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\theta_k)\mathbf{q}_k + \mathbf{M}\mathbf{1}a_{g,k}) \right] + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathbf{\Gamma}$ 为传感器选择矩阵；本算例四层全测时 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$ 。

观测噪声满足

观测方程：由状态预测楼层加速度

若 relFloorAcc 作为相对楼层加速度量测，则

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_{g,k}, \mathbf{v}_k) = \mathbf{\Gamma} \left[-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{q}_k + \mathbf{M}\mathbf{1}\mathbf{a}_{g,k}) \right] + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathbf{\Gamma}$ 为传感器选择矩阵；本算例四层全测时 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$ 。

观测噪声满足

$$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{v}})$$

观测方程：由状态预测楼层加速度

若 relFloorAcc 作为相对楼层加速度量测，则

$$y_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_{g,k}, \mathbf{v}_k) = \mathbf{\Gamma} \left[-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_k)\mathbf{q}_k + \mathbf{M}\mathbf{1}\mathbf{a}_{g,k}) \right] + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathbf{\Gamma}$ 为传感器选择矩阵；本算例四层全测时 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$ 。

观测噪声满足

$$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_k^{\mathbf{v}})$$

非线性来源

刚度矩阵 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ 与位移 $\mathbf{q}$ 相乘，观测函数含有

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}$$

这种**参数-状态双线性项**；同时状态传播还要积分动力方程。

EKF 在当前估计点处线性化动力方程与观测方程：

EKF 在当前估计点处线性化动力方程与观测方程：

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}, \quad \mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

EKF 在当前估计点处线性化动力方程与观测方程：

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}, \quad \mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

预测

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{a}_{g,k}, \mathbf{0}) \\ \Sigma_{k+1|k}^{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_k \Sigma_{k|k}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}_k^T + \Sigma_k^{\mathbf{w}}\end{aligned}$$

EKF 在当前估计点处线性化动力方程与观测方程：

$$\mathbf{A}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k}}, \quad \mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

预测

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{a}_{g,k}, \mathbf{0}) \\ \Sigma_{k+1|k}^x &= \mathbf{A}_k \Sigma_{k|k}^x \mathbf{A}_k^T + \Sigma_k^w\end{aligned}$$

更新

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{k+1} &= \Sigma_{k+1|k}^x \mathbf{C}_{k+1}^T \left(\mathbf{C}_{k+1} \Sigma_{k+1|k}^x \mathbf{C}_{k+1}^T + \Sigma_{k+1}^v \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{G}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{a}_{g,k+1}, \mathbf{0}))\end{aligned}$$

时域 EKF-Jacobian 的分块结构

把刚度按影响矩阵展开 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_s k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s)\mathbf{K}_s$, 则 $\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s$, 于是

时域 EKF-Jacobian 的分块结构

把刚度按影响矩阵展开 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_s k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s)\mathbf{K}_s$, 则 $\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s$, 于是

$$\frac{\partial (\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s\mathbf{q} \triangleq [\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q})]_{:,s}$$

连续状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, a_g)$ 的 Jacobian $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 为分块矩阵:

时域 EKF-Jacobian 的分块结构

把刚度按影响矩阵展开 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_s k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s)\mathbf{K}_s$, 则 $\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s$, 于是

$$\frac{\partial (\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s\mathbf{q} \triangleq [\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q})]_{:,s}$$

连续状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, a_g)$ 的 Jacobian $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 为分块矩阵:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

离散 Jacobian 由积分器得到, Euler 下 $\mathbf{A}_k \approx \mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Delta t$ (RK4 则为各级联合)。

观测 $h = \Gamma [-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{1}a_g)]$ 的 Jacobian:

时域 EKF-Jacobian 的分块结构

把刚度按影响矩阵展开 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_s k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s)\mathbf{K}_s$, 则 $\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s$, 于是

$$\frac{\partial (\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q})}{\partial \theta_s} = k_s^{\text{nom}}\mathbf{K}_s\mathbf{q} \triangleq [\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q})]_{:,s}$$

连续状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, a_g)$ 的 Jacobian $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 为分块矩阵:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

离散 Jacobian 由积分器得到, Euler 下 $\mathbf{A}_k \approx \mathbf{I} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Delta t$ (RK4 则为各级联合)。

观测 $h = \Gamma [-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q} + \mathbf{M}\mathbf{1}a_g)]$ 的 Jacobian:

$$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \Gamma \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) & -\mathbf{C} & -\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

参数列 $\mathbf{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q})$ 给出参数 θ_s 对响应的灵敏度, EKF 据此在线辨识刚度。

对增广状态 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$, 四层框架有

对增广状态 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$, 四层框架有

$$n_{\mathbf{x}} = 12, \quad 2n_{\mathbf{x}} + 1 = 25$$

个 sigma 点。

对增广状态 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$, 四层框架有

$$n_{\mathbf{x}} = 12, \quad 2n_{\mathbf{x}} + 1 = 25$$

个 sigma 点。

UKF 时域传递

1. 从 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \Sigma_{k|k}^{\mathbf{x}}$ 生成 25 个 sigma 点;
2. 每个 sigma 点用同一个 $\mathbf{a}_{g,k}$ 通过结构动力方程积分到 $k+1$;
3. 对传播后的 sigma 点计算楼层加速度预测 $h(\tilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{a}_{g,k+1})$;
4. 用加权均值、协方差与互协方差完成 Kalman 更新。

UKF 无需显式写出 $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 与 $\partial h / \partial \mathbf{x}$, 对 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}$ 这类双线性项与数值积分器更便于处理。

时域参数识别的 MATLAB 数据入口可以直接来自 Updating 目录:

```
1 load('Updating/FourStoryAccData_ElCentro.mat');
2 dt = T; % 0.005 s
3 ag = groundAcc(:); % 地面加速度输入
4 y = relFloorAcc; % 4 x N 楼层相对加速度
5
6 ndof = 4;
7 q0 = zeros(ndof,1);
8 v0 = zeros(ndof,1);
9 th0 = zeros(ndof,1); % 参数初值  $\theta_0 = 0$ 
10 x0 = [q0; v0; th0]; % 位移、速度、待修正参数  $\theta$ 
11
12 knom = 2000 * ones(ndof,1); % 名义刚度
13 Kfun = @(th) assemble_K(knom.*(1+th)); %  $k_s = k_s^{nom} (1+\theta_s)$ 
14
```

时域参数识别的 MATLAB 数据入口可以直接来自 Updating 目录:

```
1 load('Updating/FourStoryAccData_ElCentro.mat');
2 dt = T; % 0.005 s
3 ag = groundAcc(:); % 地面加速度输入
4 y = relFloorAcc; % 4 x N 楼层相对加速度
5
6 ndof = 4;
7 q0 = zeros(ndof,1);
8 v0 = zeros(ndof,1);
9 th0 = zeros(ndof,1); % 参数初值 theta_0 = 0
10 x0 = [q0; v0; th0]; % 位移、速度、待修正参数 theta
11
12 knom = 2000 * ones(ndof,1); % 名义刚度
13 Kfun = @(th) assemble_K(knom.*(1+th)); % k_s = k_s^nom (1+theta_s)
14
```

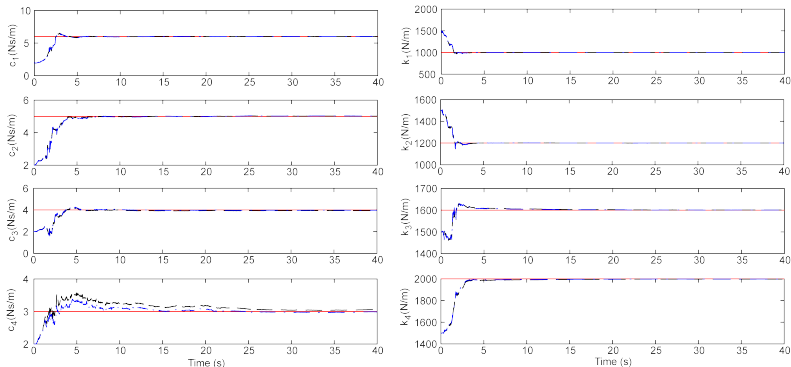
- EKF: 围绕 $\mathbf{x}_k$ 对积分后的 f 和加速度观测 h 求 Jacobian;
- UKF: 把每个 sigma 点完整送入同一个时域积分器;
- 参数 θ 与频域修正完全一致, 便于两种数据交叉验证;
- 若需保证刚度为正, 可加约束 $\theta_s > -1$, 或改用 $k_s = k_s^{\text{nom}} e^{\theta_s}$ 。

时域识别结果-四层剪切框架（收敛过程）

四层剪切框架，同时识别四个阻尼 c_s 与四个刚度（等价于 θ_s ）；缩尺 El Centro 输入、四层全测加速度，初值 $c_0 = 2$, $k_0 = 1500$ 。

时域识别结果-四层剪切框架（收敛过程）

四层剪切框架，同时识别四个阻尼 c_s 与四个刚度（等价于 θ_s ）；缩尺 El Centro 输入、四层全测加速度，初值 $c_0 = 2$, $k_0 = 1500$ 。



左列阻尼 $c_1 \sim c_4$ 、右列刚度 $k_1 \sim k_4$ 均收敛到**真实值（红线）**；EKF（虚线）与 UKF（蓝线）几乎重合。

时域识别结果-四层剪切框架（精度对比）

收敛后各参数的最终估计与误差（百分比相对真值）：

时域识别结果-四层剪切框架（精度对比）

收敛后各参数的最终估计与误差（百分比相对真值）：

参数	真实值	EKF 估计	EKF 误差	UKF 估计	UKF 误差
c_1 (Ns/m)	6	6.0082	+0.14%	6.0005	+0.01%
c_2 (Ns/m)	5	5.0174	+0.35%	5.0242	+0.48%
c_3 (Ns/m)	4	3.9392	-1.52%	3.9738	-0.65%
c_4 (Ns/m)	3	3.0554	+1.85%	2.9875	-0.42%
k_1 (N/m)	1000	999.74	-0.03%	999.80	-0.02%
k_2 (N/m)	1200	1200.56	+0.05%	1200.51	+0.04%
k_3 (N/m)	1600	1601.15	+0.07%	1600.88	+0.05%
k_4 (N/m)	2000	1997.26	-0.14%	1997.83	-0.11%

时域识别结果-四层剪切框架（精度对比）

收敛后各参数的最终估计与误差（百分比相对真值）：

参数	真实值	EKF 估计	EKF 误差	UKF 估计	UKF 误差
c_1 (Ns/m)	6	6.0082	+0.14%	6.0005	+0.01%
c_2 (Ns/m)	5	5.0174	+0.35%	5.0242	+0.48%
c_3 (Ns/m)	4	3.9392	-1.52%	3.9738	-0.65%
c_4 (Ns/m)	3	3.0554	+1.85%	2.9875	-0.42%
k_1 (N/m)	1000	999.74	-0.03%	999.80	-0.02%
k_2 (N/m)	1200	1200.56	+0.05%	1200.51	+0.04%
k_3 (N/m)	1600	1601.15	+0.07%	1600.88	+0.05%
k_4 (N/m)	2000	1997.26	-0.14%	1997.83	-0.11%

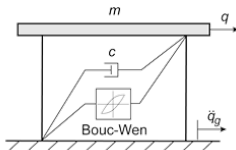
- **刚度比阻尼收敛更快、更准**，因为刚度对加速度响应更敏感；
- EKF 与 UKF 精度相当，UKF 总体略优，且**无需推导 Jacobian**；
- 误差主要来自有限数据与噪声，均在工程可接受范围（ $\leq 2\%$ ）。

非线性时域修正-Bouc-Wen 滞回系统

实际结构在强震下进入**非线性滞回**，刚度不再是常数。考虑下图的单自由度 Bouc-Wen 体系（弹簧 k 、阻尼 c 与滞回元件并联，受地面加速度 $\ddot{q}_g$ 激励）：

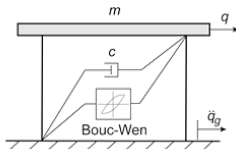
非线性时域修正-Bouc-Wen 滞回系统

实际结构在强震下进入**非线性滞回**，刚度不再是常数。考虑下图的单自由度 Bouc-Wen 体系（弹簧 k 、阻尼 c 与滞回元件并联，受地面加速度 $\ddot{q}_g$ 激励）：



非线性时域修正-Bouc-Wen 滞回系统

实际结构在强震下进入**非线性滞回**，刚度不再是常数。考虑下图的单自由度 Bouc-Wen 体系（弹簧 k 、阻尼 c 与滞回元件并联，受地面加速度 $\ddot{q}_g$ 激励）：



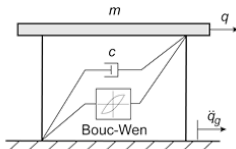
运动方程 (z 为**滞回位移**，恢复力 $r = kz$)：

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kz = -m(\ddot{q}_g + w), \quad \dot{z} = \dot{q} \left(1 - |z|^n (\gamma + \beta \operatorname{sgn}(z\dot{q})) \right)$$

其中 β, γ, n 为无量纲滞回形状参数， w 为输入噪声。

非线性时域修正-Bouc-Wen 滞回系统

实际结构在强震下进入**非线性滞回**，刚度不再是常数。考虑下图的单自由度 Bouc-Wen 体系（弹簧 k 、阻尼 c 与滞回元件并联，受地面加速度 $\ddot{q}_g$ 激励）：



运动方程 (z 为**滞回位移**，恢复力 $r = kz$)：

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kz = -m(\ddot{q}_g + w), \quad \dot{z} = \dot{q} \left(1 - |z|^n (\gamma + \beta \operatorname{sgn}(z\dot{q})) \right)$$

其中 β, γ, n 为无量纲滞回形状参数， w 为输入噪声。

待修正参数

$$\theta = [c, k, \beta, \gamma, n]^T, \quad y_k = -(c\dot{q}_k + kz_k)/m + v_k$$

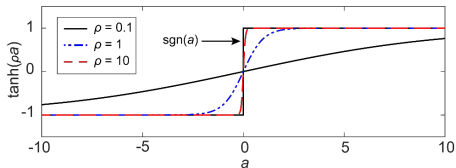
质量 m 视为已知，其余参数由**实时加速度**观测在线识别； y_k 是 θ 的非线性函数。

原始 Bouc–Wen 方程在 $\dot{q} = 0$ 或 $z = 0$ 处**不可微** (含 $\text{sgn}(\cdot)$ 与 $|z|^n$)，不利于 EKF 线性化。用双曲正切光滑化：

可微 Bouc–Wen 模型

原始 Bouc–Wen 方程在 $\dot{q} = 0$ 或 $z = 0$ 处**不可微** (含 $\text{sgn}(\cdot)$ 与 $|z|^n$)，不利于 EKF 线性化。用双曲正切光滑化：

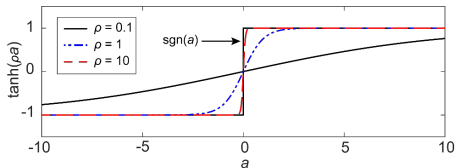
$$\text{sgn}(a) \approx \tanh(\rho a), \quad \dot{z} = \dot{q} \left(1 - \left(\tanh(\rho z) z \right)^n (\gamma + \beta \tanh(\rho z \dot{q})) \right)$$



可微 Bouc–Wen 模型

原始 Bouc–Wen 方程在 $\dot{q} = 0$ 或 $z = 0$ 处**不可微** (含 $\text{sgn}(\cdot)$ 与 $|z|^n$)，不利于 EKF 线性化。用双曲正切光滑化：

$$\text{sgn}(a) \approx \tanh(\rho a), \quad \dot{z} = \dot{q} \left(1 - \left(\tanh(\rho z) z \right)^n (\gamma + \beta \tanh(\rho z \dot{q})) \right)$$



- ρ 越大, $\tanh(\rho a)$ 越逼近 $\text{sgn}(a)$;
- 约定 $n \geq 1$ 以消除 $|z|^n$ 在 $z = 0$ 的导数奇异;
- 光滑模型与原模型动力响应几乎一致;
- 由此可对 $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 求解析或差分 Jacobian。

三处导数奇异

EKF 需对状态方程求 Jacobian, 原始模型 $\dot{z} = \dot{q}(1 - |z|^n(\gamma + \beta \operatorname{sgn}(z\dot{q})))$ 有三处不可微:

(1) 符号函数 $\operatorname{sgn}(a)$ 在 $a = 0$ 不可导 ($|a| = \operatorname{sgn}(a)a$ 同理)。用 $\operatorname{sgn}(a) \approx \tanh(\rho a)$ 光滑替代, $\rho > 0$ 控制陡度。

(2) 幂函数 a^b 对底数 a 求导 (此处 $a = \tanh(\rho z)z \geq 0, b = n$):

$$\frac{\partial}{\partial a} a^b = b a^{b-1} \Rightarrow b < 1 \text{ 时在 } a = 0 \text{ 发散.}$$

故约定 $n \geq 1$ (覆盖绝大多数工程情形), 导数处处有界。

(3) 幂函数 a^b 对指数 $b = n$ 求导 (底数 $a = 0$ 时):

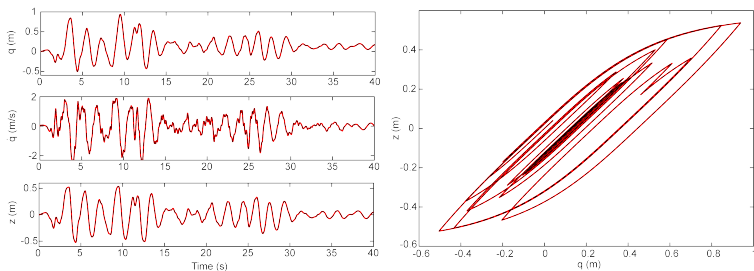
$$\frac{\partial}{\partial b} a^b = a^b \ln a, \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} a^b \ln a \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a}{a^{-b}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-a^b}{b} = 0.$$

因此在实现中定义 $\left. \frac{\partial}{\partial n} a^n \right|_{a=0} = 0$, 消除奇异。

取 $m = 1 \text{ kg}$, $c = 0.3 \text{ Ns/m}$, $k = 12 \text{ N/m}$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $n = 2$, $\rho = 100$, 缩尺 El Centro 激励 40 s。

Bouc-Wen 体系的时域响应

取 $m = 1 \text{ kg}$, $c = 0.3 \text{ Ns/m}$, $k = 12 \text{ N/m}$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $n = 2$, $\rho = 100$, 缩尺 El Centro 激励 40 s。

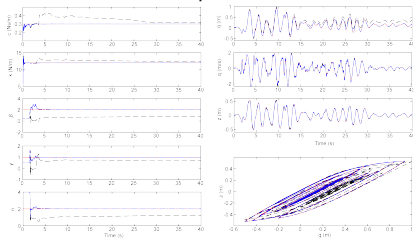


左：位移 q 、速度 $\dot{q}$ 、滞回位移 z 时程；右： z - q 滞回环。光滑 Bouc-Wen 模型（黑/红重合）很好地复现了非线性滞回行为。

Bouc-Wen 参数识别

初值 $c_0 = 0.15$, $k_0 = 6$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 0.5$, $n_0 = 1$, 施加物理约束 $c \geq 0$, $k \geq 0$ 。
对比标准滤波与**约束滤波** (CEKF/CUKF)。

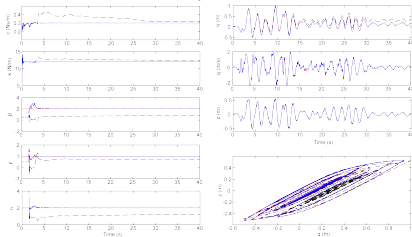
EKF / CEKF



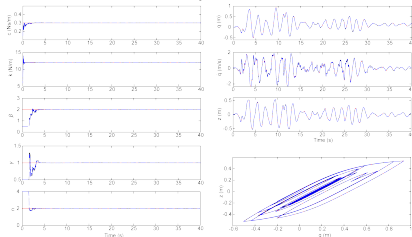
Bouc-Wen 参数识别

初值 $c_0 = 0.15$, $k_0 = 6$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 0.5$, $n_0 = 1$, 施加物理约束 $c \geq 0$, $k \geq 0$ 。
对比标准滤波与**约束滤波** (CEKF/CUKF)。

EKF / CEKF



UKF / CUKF

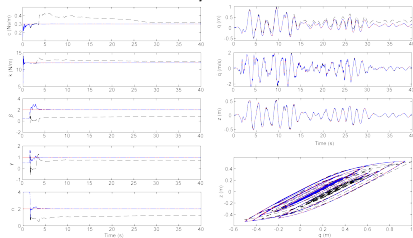


各参数 (c, k, β, γ, n) 从初值收敛到真实值; 右侧为响应复现与滞回环。

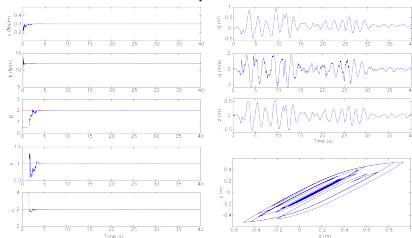
Bouc-Wen 参数识别

初值 $c_0 = 0.15$, $k_0 = 6$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 0.5$, $n_0 = 1$, 施加物理约束 $c \geq 0$, $k \geq 0$ 。
对比标准滤波与**约束滤波** (CEKF/CUKF)。

EKF / CEKF



UKF / CUKF

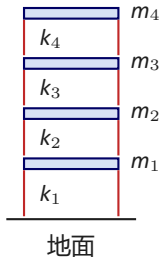


各参数 (c, k, β, γ, n) 从初值收敛到真实值; 右侧为响应复现与滞回环。

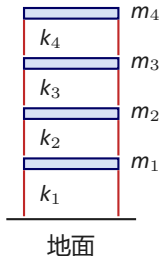
刚度 k 、阻尼 c 收敛最快 (振动初期近似线性), 滞回参数稍慢。约束滤波保证 c, k 始终非负, 标准滤波则可能短暂越界。约束的实现方法见后文**约束、正则化与协方差膨胀**一节。

频域类比修正-模态残差伪观测

四层剪切框架参数化



四层剪切框架参数化



Updating/main_modal_updating.m 中的设置:

$$n_{\text{dof}} = 4, \quad m_s = 5 \text{ kg},$$

$$k_s^{\text{nom}} = 2000 \text{ N/m}$$

各层刚度用相对修正系数表示:

$$k_s(\theta_s) = k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s),$$

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$$

算例中的真实参数为

$$\theta_{\text{true}} = [-0.20, 0.05, -0.35, 0.10]^T$$

初始名义模型取 $\theta_0 = 0$ 。

对每组 θ , 先组装 $M, K(\theta)$, 再求解广义特征值问题:

对每组 θ , 先组装 $M, K(\theta)$, 再求解广义特征值问题:

$$(K(\theta) - \omega_i^2(\theta)M)\phi_i(\theta) = 0$$

算例使用前 $n_{\text{mode}} = 3$ 阶频率与振型, 并对每阶振型按参考分量归一化。

对每组 θ , 先组装 $M, K(\theta)$, 再求解广义特征值问题:

$$(\mathbf{K}(\theta) - \omega_i^2(\theta)\mathbf{M})\phi_i(\theta) = \mathbf{0}$$

算例使用前 $n_{\text{mode}} = 3$ 阶频率与振型, 并对每阶振型按参考分量归一化。

残差定义

$$\mathbf{r}(\theta) = \text{col}_{i=1}^m \left(\frac{\omega_i^{\text{exp}} - \omega_i(\theta)}{\omega_i^{\text{exp}}}, \Phi_i^{\text{exp}} - \Phi_i(\theta) \right)$$
$$f(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(\theta) \mathbf{r}(\theta)$$

对应代码: Updating/resid_vec.m 与 Updating/residual_jacobian.m。

把残差写成观测方程

传统模型修正希望找到 $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$; 这可以等价写成一条伪观测:

把残差写成观测方程

传统模型修正希望找到 $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$; 这可以等价写成一条伪观测:

$$\underbrace{\mathbf{0}}_{\text{观测值}} = \underbrace{\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}_k)}_{\text{非线性观测函数}} + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{v}})$$

把残差写成观测方程

传统模型修正希望找到 $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ ；这可以等价写成一条伪观测：

$$\underbrace{\mathbf{0}}_{\text{观测值}} = \underbrace{\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}_k)}_{\text{非线性观测函数}} + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_r^v)$$

- $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})$ 越接近 $\mathbf{0}$ ，说明模型越贴近试验模态；
- $\boldsymbol{\Sigma}_r^v$ 表示对频率残差、振型残差的信任程度；
- $\boldsymbol{\Sigma}_k^w$ 表示参数随时间漂移的程度，在线损伤跟踪中可取非零；
- 对一次性试验数据，也可把同一伪观测重复使用，形成**迭代 Kalman 修正**。

已有残差函数可直接复用：EKF 只需 $\partial \mathbf{r} / \partial \boldsymbol{\theta}$ ，UKF 不需要该 Jacobian。

EKF 频域类比修正

把参数 θ 看成慢变状态:

参数状态空间模型

把参数 θ 看成慢变状态:

$$\theta_{k|k-1} = \theta_{k-1|k-1}, \quad \Sigma_{k|k-1}^{\theta} = \Sigma_{k-1|k-1}^{\theta} + \Sigma_k^w$$

其中 Σ^{θ} 是参数估计协方差。

对伪观测 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\theta_k) + \mathbf{v}_k$, EKF 在当前先验点处线性化:

参数状态空间模型

把参数 θ 看成慢变状态:

$$\theta_{k|k-1} = \theta_{k-1|k-1}, \quad \Sigma_{k|k-1}^{\theta} = \Sigma_{k-1|k-1}^{\theta} + \Sigma_k^w$$

其中 Σ^{θ} 是参数估计协方差。

对伪观测 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\theta_k) + \mathbf{v}_k$, EKF 在当前先验点处线性化:

$$\mathbf{r}(\theta_k) \approx \mathbf{r}(\hat{\theta}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k(\theta_k - \hat{\theta}_{k|k-1})$$

参数状态空间模型

把参数 θ 看成慢变状态：

$$\theta_{k|k-1} = \theta_{k-1|k-1}, \quad \Sigma_{k|k-1}^{\theta} = \Sigma_{k-1|k-1}^{\theta} + \Sigma_k^w$$

其中 Σ^{θ} 是参数估计协方差。

对伪观测 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\theta_k) + \mathbf{v}_k$ ，EKF 在当前先验点处线性化：

$$\mathbf{r}(\theta_k) \approx \mathbf{r}(\hat{\theta}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k(\theta_k - \hat{\theta}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}_{k|k-1}}$$

在本算例中， $\mathbf{H}_k$ 可由中心差分得到，正是 `residual_jacobian.m` 返回的 Jacobian。

伪观测为 0, 因此预测残差为

伪观测为 $\mathbf{0}$, 因此预测残差为

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{0} - \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1}) = -\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1})$$

伪观测为 0，因此预测残差为

$$\boldsymbol{\nu}_k = \mathbf{0} - \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1}) = -\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1})$$

测量更新

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^y = \mathbf{H}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} \mathbf{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_r^y$$

$$\mathbf{G}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} \mathbf{H}_k^T (\boldsymbol{\Sigma}_k^y)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} + \mathbf{G}_k \boldsymbol{\nu}_k$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k|k}^{\theta} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k) \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_r^y \mathbf{G}_k^T$$

EKF 用局部切线 $\mathbf{H}_k$ 描述各层刚度变化对模态残差的影响方向。

EKF 与现有代码的接口

基于 Updating 目录中已有函数，EKF 的核心循环可以写得很短：

```
1  theta = theta0;
2  Sig_th = diag(0.25^2 * ones(ndof,1)); % 参数协方差
3  Sig_w  = diag(1e-6 * ones(ndof,1)); % 参数随机游走
4  Sig_vr = diag(sigma_r.^2);           % 残差噪声协方差
5
6  for k = 1:maxit
7      Sig_th = Sig_th + Sig_w;          % 预测
8      [r, J] = residual_jacobian(theta, data);
9      Sig_y = J*Sig_th*J' + Sig_vr;
10     G = Sig_th*J'/Sig_y;
11     theta = theta - G*r;               % y = 0, innovation = -r
12     Sig_th = (eye(ndof)-G*J)*Sig_th*(eye(ndof)-G*J)' + G*Sig_vr*G';
13 end
14
```

EKF 与现有代码的接口

基于 Updating 目录中已有函数，EKF 的核心循环可以写得很短：

```
1 theta = theta0;
2 Sig_th = diag(0.25^2 * ones(ndof,1)); % 参数协方差
3 Sig_w = diag(1e-6 * ones(ndof,1)); % 参数随机游走
4 Sig_vr = diag(sigma_r.^2); % 残差噪声协方差
5
6 for k = 1:maxit
7     Sig_th = Sig_th + Sig_w; % 预测
8     [r, J] = residual_jacobian(theta, data);
9     Sig_y = J*Sig_th*J' + Sig_vr;
10    G = Sig_th*J'/Sig_y;
11    theta = theta - G*r; % y = 0, innovation = -r
12    Sig_th = (eye(ndof)-G*J)*Sig_th*(eye(ndof)-G*J)' + G*Sig_vr*G';
13 end
14
```

注意：若 Σ_r^v 过小，滤波器会过度相信含噪模态；若 Σ_k^w 过大，参数会出现不必要的抖动。

EKF 在模型修正中的注意事项

- **模态配对**: 每次求解特征值后, 应确认数值模态与实测模态——对应;
- **振型符号**: 振型可差一个正负号, 必须先用参考分量或 MAC 统一符号;
- **尺度权重**: 频率残差与振型残差量纲不同, 应通过 Σ_r^v 或预归一化平衡;
- **Jacobian 步长**: 差分步长过小会受数值噪声影响, 过大又偏离线性化区域;
- **物理约束**: 需保证 $k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s) > 0$, 避免刚度矩阵失去正定性。

EKF 在模型修正中的注意事项

- **模态配对**: 每次求解特征值后, 应确认数值模态与实测模态——对应;
- **振型符号**: 振型可差一个正负号, 必须先用参考分量或 MAC 统一符号;
- **尺度权重**: 频率残差与振型残差量纲不同, 应通过 Σ_r^v 或预归一化平衡;
- **Jacobian 步长**: 差分步长过小会受数值噪声影响, 过大又偏离线性化区域;
- **物理约束**: 需保证 $k_s^{\text{nom}}(1 + \theta_s) > 0$, 避免刚度矩阵失去正定性。

EKF 的优势与风险

若模态映射在当前点附近接近线性, EKF 收敛很快; 但当初始模型偏差大、模态发生交换、或残差曲面曲率明显时, 一阶线性化可能给出偏差较大的修正方向。

UKF 频域类比修正

为什么模型修正适合 UKF

模态模型修正的观测函数

为什么模型修正适合 UKF

模态模型修正的观测函数

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{r}(\omega_i(\boldsymbol{\theta}), \phi_i(\boldsymbol{\theta}))$$

不是显式代数函数，而是由以下步骤组合而成：

为什么模型修正适合 UKF

模态模型修正的观测函数

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{r}(\omega_i(\boldsymbol{\theta}), \phi_i(\boldsymbol{\theta}))$$

不是显式代数函数，而是由以下步骤组合而成：

1. 根据 $\boldsymbol{\theta}$ 组装 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$;
2. 求解 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$;
3. 对振型排序、定符号、归一化;
4. 与实测模态作差，形成残差。

UKF 不计算 Jacobian，而是在当前协方差范围内扰动 $\boldsymbol{\theta}$ ，由残差 $\mathbf{r}$ 的变化重建所需统计量。

对四层框架， $n_{\boldsymbol{\theta}} = 4$ ，UKF 每步只需传播

为什么模型修正适合 UKF

模态模型修正的观测函数

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{r}(\omega_i(\boldsymbol{\theta}), \phi_i(\boldsymbol{\theta}))$$

不是显式代数函数，而是由以下步骤组合而成：

1. 根据 $\boldsymbol{\theta}$ 组装 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$;
2. 求解 $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$;
3. 对振型排序、定符号、归一化;
4. 与实测模态作差，形成残差。

UKF 不计算 Jacobian，而是在当前协方差范围内扰动 $\boldsymbol{\theta}$ ，由残差 $\mathbf{r}$ 的变化重建所需统计量。

对四层框架， $n_{\theta} = 4$ ，UKF 每步只需传播

$$2n_{\theta} + 1 = 9$$

个 sigma 点。

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}, \Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}, \Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

$$\tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_{k|k-1}$$

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}$, $\Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

$$\tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_{k|k-1}$$

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}$, $\Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

$$\tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_{k|k-1}$$

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

$$\tilde{\theta}_{i+n_{\theta}} = \hat{\theta}_{k|k-1} - \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

对应的均值与协方差权重 ($\lambda = \alpha^2(n_{\theta} + \kappa) - n_{\theta}$):

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}$, $\Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

$$\tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_{k|k-1}$$

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

$$\tilde{\theta}_{i+n_{\theta}} = \hat{\theta}_{k|k-1} - \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

对应的均值与协方差权重 ($\lambda = \alpha^2(n_{\theta} + \kappa) - n_{\theta}$):

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_{\theta} + \lambda}, \quad W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_{\theta} + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_{\theta} + \lambda)}$$

(α 控制散布, κ 为次级缩放, $\beta = 2$ 对高斯最优。)

每个 sigma 点都通过完整的模态分析流程:

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}$, $\Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

$$\tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_{k|k-1}$$

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

$$\tilde{\theta}_{i+n_{\theta}} = \hat{\theta}_{k|k-1} - \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

对应的均值与协方差权重 ($\lambda = \alpha^2(n_{\theta} + \kappa) - n_{\theta}$):

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_{\theta} + \lambda}, \quad W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_{\theta} + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_{\theta} + \lambda)}$$

(α 控制散布, κ 为次级缩放, $\beta = 2$ 对高斯最优。)

每个 sigma 点都通过完整的模态分析流程:

参数空间中的 Sigma 点

给定先验 $\hat{\theta}_{k|k-1}$, $\Sigma_{k|k-1}^{\theta}$, 构造

$$\tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_{k|k-1}$$

$$\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

$$\tilde{\theta}_{i+n_{\theta}} = \hat{\theta}_{k|k-1} - \left(\sqrt{(n_{\theta} + \lambda) \Sigma_{k|k-1}^{\theta}} \right)_i$$

对应的均值与协方差权重 ($\lambda = \alpha^2(n_{\theta} + \kappa) - n_{\theta}$):

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_{\theta} + \lambda}, \quad W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_{\theta} + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \quad W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_{\theta} + \lambda)}$$

(α 控制散布, κ 为次级缩放, $\beta = 2$ 对高斯最优。)

每个 sigma 点都通过完整的模态分析流程:

由 sigma 点残差 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i)$ 重建预测残差:

由 sigma 点残差 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i)$ 重建预测残差:

$$\bar{\mathbf{r}} = \sum_i w_i^{(m)} \mathbf{r}_i$$

由 sigma 点残差 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tilde{\theta}_i)$ 重建预测残差:

$$\bar{\mathbf{r}} = \sum_i W_i^{(m)} \mathbf{r}_i$$

$$\Sigma_k^{\mathbf{r}} = \sum_i W_i^{(c)} (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})^T + \Sigma_{\mathbf{r}}^{\mathbf{v}}$$

参数与残差的互协方差为

由 sigma 点残差 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i)$ 重建预测残差:

$$\bar{\mathbf{r}} = \sum_i w_i^{(m)} \mathbf{r}_i$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{r}} = \sum_i w_i^{(c)} (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{v}}$$

参数与残差的互协方差为

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\boldsymbol{\theta}\mathbf{r}} = \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})^T$$

由 sigma 点残差 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i)$ 重建预测残差:

$$\bar{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{W}_i^{(m)} \mathbf{r}_i$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{W}_i^{(c)} (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{v}}$$

参数与残差的互协方差为

$$\boldsymbol{\Sigma}_k^{\theta \mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{W}_i^{(c)} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})^T$$

零残差伪观测更新

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_k &= \boldsymbol{\Sigma}_k^{\theta \mathbf{r}} (\boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{r}})^{-1}, & \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} - \mathbf{G}_k \bar{\mathbf{r}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k}^{\theta} &= \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathbf{r}} \mathbf{G}_k^T \end{aligned}$$

UKF 的修正方向来自残差点云的统计相关性, 而非局部切线。

UKF 只需要能计算残差的函数 `resid_vec.m`:

```
theta = theta0;
Sig_th = diag(0.25^2 * ones(ndof,1));

for k = 1:maxit
    Sig_th = Sig_th + Sig_w;
    [X, Wm, Wc] = sigma_points(theta, Sig_th, alpha, beta, kappa);

    for i = 1:size(X,2)
        Y(:,i) = resid_vec(X(:,i), data);
    end

    rbar = Y * Wm(:);
    [Sig_r, Sig_tr] = unscented_cov(X, theta, Y, rbar, Wc, Sig_vr);
    G = Sig_tr / Sig_r;
    theta = theta - G*rbar;    % y = 0
    Sig_th = Sig_th - G*Sig_r'*G';
end
```

约束、正则化与协方差膨胀

无论时域还是频域，模型修正都归结为同一个随机动力系统：

无论时域还是频域，模型修正都归结为同一个随机动力系统：

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{y}_k = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}_k) + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathcal{G}$ 为**参数到数据映射**（时域为加速度，频域为模态量）。在此框架上常需三类扩展：

无论时域还是频域，模型修正都归结为同一个随机动力系统：

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{y}_k = \mathcal{G}(\theta_k) + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathcal{G}$ 为**参数到数据映射**（时域为加速度，频域为模态量）。在此框架上常需三类扩展：

- **约束实现**：让 θ 满足物理边界（如刚度、阻尼非负）；
- **协方差膨胀**：当结构突变（损伤）时防止滤波器发散；
- **正则化**：缓解病态、抑制过拟合，并促进损伤的**稀疏性**。

统一推导：贝叶斯预测与更新

记 $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 。时间更新（随机游走演化）：

统一推导：贝叶斯预测与更新

记 $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 。时间更新（随机游走演化）：

$$\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\theta} = \boldsymbol{\mu}_{k-1|k-1}^{\theta}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}_{k-1|k-1}^{\theta} + \boldsymbol{\Sigma}^w$$

高斯近似下, $\{\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{y}_k\} \mid \mathbf{Y}_{k-1}$ 的联合分布为

统一推导：贝叶斯预测与更新

记 $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 。时间更新（随机游走演化）：

$$\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\theta} = \boldsymbol{\mu}_{k-1|k-1}^{\theta}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}_{k-1|k-1}^{\theta} + \boldsymbol{\Sigma}^w$$

高斯近似下， $\{\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{y}_k\} \mid \mathbf{Y}_{k-1}$ 的联合分布为

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\theta} \\ \boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} & \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\mathbf{y}\theta} & \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\mathbf{y}} \end{bmatrix}\right)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\mathbf{y}} = \mathbb{E}[\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}_k) \mid \mathbf{Y}_{k-1}]$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\mathbf{y}} = \text{Cov}[\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}_k) \mid \mathbf{Y}_{k-1}] + \boldsymbol{\Sigma}^v$ 。

统一推导：贝叶斯预测与更新

记 $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 。 **时间更新** (随机游走演化):

$$\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\theta} = \boldsymbol{\mu}_{k-1|k-1}^{\theta}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}_{k-1|k-1}^{\theta} + \boldsymbol{\Sigma}^w$$

高斯近似下, $\{\boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{y}_k\} \mid \mathbf{Y}_{k-1}$ 的联合分布为

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\theta} \\ \boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} & \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta y} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{y\theta} & \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^y \end{bmatrix}\right)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^y = \mathbb{E}[\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}_k) \mid \mathbf{Y}_{k-1}]$, $\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^y = \text{Cov}[\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}_k) \mid \mathbf{Y}_{k-1}] + \boldsymbol{\Sigma}^v$ 。

测量更新 (条件高斯导出 Kalman 增益)

$$\mathbf{G}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta y} (\boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^y)^{-1}$$
$$\boldsymbol{\mu}_{k|k}^{\theta} = \boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^{\theta} + \mathbf{G}_k (\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\mu}_{k|k-1}^y), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{k|k}^{\theta} = \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^{\theta} - \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k|k-1}^y \mathbf{G}_k^T$$

EKF 用 Jacobian、UKF 用 sigma 点分别近似上面三个统计量 $\boldsymbol{\mu}^y, \boldsymbol{\Sigma}^{\theta y}, \boldsymbol{\Sigma}^y$, 其余公式完全相同。

约束 UKF (CUKF) – 两类实现思路

标准 UKF 不含约束, 可能给出**违反物理**的估计 (如负刚度、负阻尼)。约束 UKF (CUKF) 在识别过程中强制 $g(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0}$, 可行域记为 Ω 。主要有两大类做法:

约束 UKF (CUKF) – 两类实现思路

标准 UKF 不含约束, 可能给出**违反物理**的估计 (如负刚度、负阻尼)。约束 UKF (CUKF) 在识别过程中强制 $g(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0}$, 可行域记为 Ω 。主要有两大类做法:

- **改造 sigma 点**: 把落在 Ω 外的 sigma 点拉回可行域, 再做加权统计:
 - 投影 sigma 点法、箱型约束 sigma 点法、一般约束 sigma 点法;
- **改造 Kalman 增益**: 不动 sigma 点, 直接约束增益使**后验估计**满足约束:
 - 约束增益法 (即下文 CUKF 之四, 用有效集投影边界)。

约束 UKF (CUKF) – 两类实现思路

标准 UKF 不含约束, 可能给出**违反物理**的估计 (如负刚度、负阻尼)。约束 UKF (CUKF) 在识别过程中强制 $g(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0}$, 可行域记为 Ω 。主要有两大类做法:

- **改造 sigma 点**: 把落在 Ω 外的 sigma 点拉回可行域, 再做加权统计:
 - 投影 sigma 点法、箱型约束 sigma 点法、一般约束 sigma 点法;
- **改造 Kalman 增益**: 不动 sigma 点, 直接约束增益使**后验估计**满足约束:
 - 约束增益法 (即下文 CUKF 之四, 用有效集投影边界)。

评价 sigma 点类方法的两个关键

调整后的 sigma 点能否**保持对称性**、能否复现原分布的**均值与协方差** (前两阶矩), 直接决定估计是否有偏。

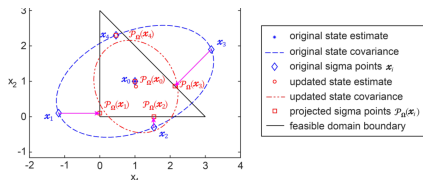
把可行域外的 sigma 点 x_i 正交**投影**到边界:

CUKF 之一—投影 sigma 点法

把可行域外的 sigma 点 x_i 正交**投影**到边界:

$$\mathcal{P}_{\Omega}(x_i) = \arg \min_x \|x - x_i\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad g(x) \succeq 0$$

对标量线性不等式 $a^T x \geq b$ 与箱型约束 $x_L \preceq x \preceq x_U$ 有**解析解** (越界即拉到边界)。

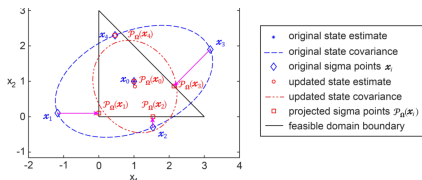


CUKF 之一—投影 sigma 点法

把可行域外的 sigma 点 x_i 正交**投影**到边界:

$$\mathcal{P}_{\Omega}(x_i) = \arg \min_x \|x - x_i\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad g(x) \succeq 0$$

对标量线性不等式 $a^T x \geq b$ 与箱型约束 $x_L \preceq x \preceq x_U$ 有**解析解** (越界即拉到边界)。



- 蓝菱形：原 sigma 点；红方块：投影后；
- 测量更新与时间更新两步都需投影；
- **缺点**：投影点关于均值**不再对称**，重建的均值/协方差**有偏**。

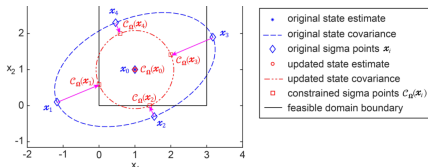
仅处理箱型约束 $\mathbf{x}_L \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{x}_U$ 。沿指向均值的方向把越界点移到边界，并**同步移动其对称点**以保持对称：

CUKF 之二-箱型约束 sigma 点法

仅处理箱型约束 $\mathbf{x}_L \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{x}_U$ 。沿指向均值的方向把越界点移到边界，并**同步移动其对称点**以保持对称：

$$\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}} \pm d_i (\sqrt{\Sigma_{\mathbf{x}}})_i, \quad d_i = \min(\sqrt{N + \kappa}, d_i^1, d_i^2)$$

权重按**线性法**随距离 d_i 调整 ($w_i = a d_i + b$)。

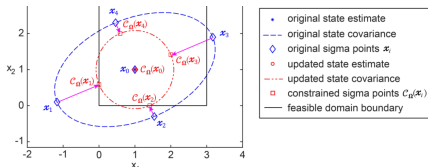


CUKF 之二-箱型约束 sigma 点法

仅处理箱型约束 $\mathbf{x}_L \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{x}_U$ 。沿指向均值的方向把越界点移到边界，并**同步移动其对称点**以保持对称：

$$\mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}} \pm d_i (\sqrt{\Sigma_{\mathbf{x}}})_i, \quad d_i = \min(\sqrt{N + \kappa}, d_i^1, d_i^2)$$

权重按**线性法**随距离 d_i 调整 ($w_i = a d_i + b$)。



- sigma 点保持**对称** $\Rightarrow$ 均值不变；
- 但线性权重使**协方差改变**；
- **局限**：只能处理箱型约束。

CUKF 之三—一般约束 sigma 点法 (改进)

两点改进: (1) 把权重改为

CUKF 之三—一般约束 sigma 点法 (改进)

两点改进: (1) 把权重改为

$$W_i = \frac{1}{2d_i^2} \quad (i \geq 1), \quad W_0 = 1 - \sum_{i=1}^{2N} W_i$$

可证明加权**均值与协方差同时**与原分布前两阶矩一致; (2) 对**一般约束**
 $g(\mathbf{x}) \succeq \mathbf{0}$ 用**回溯线搜索**把 sigma 点拉入可行域:

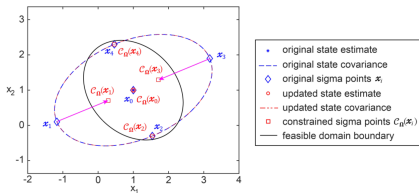
CUKF 之三—一般约束 sigma 点法 (改进)

两点改进: (1) 把权重改为

$$W_i = \frac{1}{2d_i^2} \quad (i \geq 1), \quad W_0 = 1 - \sum_{i=1}^{2N} W_i$$

可证明加权**均值与协方差同时**与原分布前两阶矩一致; (2) 对**一般约束** $g(\mathbf{x}) \succeq 0$ 用**回溯线搜索**把 sigma 点拉入可行域:

$$d_i \leftarrow \sqrt{N + \kappa}; \quad \text{while infeasible: } d_i \leftarrow \alpha d_i \quad (\alpha \in (0, 1))$$



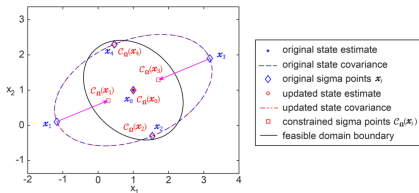
CUKF 之三—一般约束 sigma 点法 (改进)

两点改进: (1) 把权重改为

$$W_i = \frac{1}{2d_i^2} \quad (i \geq 1), \quad W_0 = 1 - \sum_{i=1}^{2N} W_i$$

可证明加权**均值与协方差同时**与原分布前两阶矩一致; (2) 对**一般约束** $g(\mathbf{x}) \geq 0$ 用**回溯线搜索**把 sigma 点拉入可行域:

$$d_i \leftarrow \sqrt{N + \kappa}; \quad \text{while infeasible: } d_i \leftarrow \alpha d_i \quad (\alpha \in (0, 1))$$



- 同时保持**均值与协方差** (最优性更好);
- 适配任意可行域 Ω ;
- 注意: 估计贴近边界时个别权重可能过大。

CUKF 之四-约束增益法 (带边界的 Kalman 增益)

要求参数满足分量不等式 $L_\theta \preceq \theta \preceq U_\theta$, 写成 $A\theta \succeq b$, 其中

CUKF 之四-约束增益法 (带边界的 Kalman 增益)

要求参数满足分量不等式 $L_\theta \preceq \theta \preceq U_\theta$, 写成 $A\theta \succeq b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} L_\theta \\ -U_\theta \end{pmatrix}$$

约束增益 G_k^c 由带约束的二次规划给出:

CUKF 之四-约束增益法 (带边界的 Kalman 增益)

要求参数满足分量不等式 $\mathbf{L}_\theta \preceq \boldsymbol{\theta} \preceq \mathbf{U}_\theta$, 写成 $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \succeq \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_\theta \\ -\mathbf{U}_\theta \end{pmatrix}$$

约束增益 $\mathbf{G}_k^c$ 由带约束的二次规划给出:

$$\min_{\mathbf{G}_k^c} \text{Trace}(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k}^\theta) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{L}_\theta \preceq \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} + \mathbf{G}_k^c \boldsymbol{\nu}_k \preceq \mathbf{U}_\theta$$

CUKF 之四—约束增益法 (带边界的 Kalman 增益)

要求参数满足分量不等式 $\mathbf{L}_\theta \preceq \boldsymbol{\theta} \preceq \mathbf{U}_\theta$, 写成 $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \succeq \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_\theta \\ -\mathbf{U}_\theta \end{pmatrix}$$

约束增益 $\mathbf{G}_k^c$ 由**带约束的二次规划**给出:

$$\min_{\mathbf{G}_k^c} \text{Trace}(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k}^\theta) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{L}_\theta \preceq \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} + \mathbf{G}_k^c \boldsymbol{\nu}_k \preceq \mathbf{U}_\theta$$

有效集 (active set) 解法: 越界即投影到边界

设 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ 为无约束估计, $\mathcal{C}$ 为越界分量的指标集, 则

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} - \mathbf{A}_\mathcal{C}^T (\mathbf{A}_\mathcal{C} \mathbf{A}_\mathcal{C}^T)^{-1} (\mathbf{A}_\mathcal{C} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} - \mathbf{b}_\mathcal{C})$$

即把超出边界的分量**拉回到对应边界**。

CUKF 之四—约束增益法 (带边界的 Kalman 增益)

要求参数满足分量不等式 $\mathbf{L}_\theta \preceq \boldsymbol{\theta} \preceq \mathbf{U}_\theta$, 写成 $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \succeq \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_\theta \\ -\mathbf{U}_\theta \end{pmatrix}$$

约束增益 $\mathbf{G}_k^c$ 由**带约束的二次规划**给出:

$$\min_{\mathbf{G}_k^c} \text{Trace}(\boldsymbol{\Sigma}_{k|k}^\theta) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{L}_\theta \preceq \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k-1} + \mathbf{G}_k^c \boldsymbol{\nu}_k \preceq \mathbf{U}_\theta$$

有效集 (active set) 解法: 越界即投影到边界

设 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k}$ 为无约束估计, $\mathcal{C}$ 为越界分量的指标集, 则

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} - \mathbf{A}_\mathcal{C}^T (\mathbf{A}_\mathcal{C} \mathbf{A}_\mathcal{C}^T)^{-1} (\mathbf{A}_\mathcal{C} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{k|k} - \mathbf{b}_\mathcal{C})$$

即把超出边界的分量**拉回到对应边界**。

用途: Bouc-Wen 例中保证 $c \geq 0, k \geq 0$, 即前述 CEKF/CUKF。

约束推导-从二次规划到增益修正

把更新写成 $\mu_{k|k}^{\theta} = \mu_{k|k-1}^{\theta} + \mathbf{G}_k^c \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \mu_{k|k-1}^y$ 。目标函数关于 $\mathbf{G}_k^c$ 是二次型：

约束推导-从二次规划到增益修正

把更新写成 $\mu_{k|k}^{\theta} = \mu_{k|k-1}^{\theta} + \mathbf{G}_k^c \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \mu_{k|k-1}^y$ 。目标函数关于 $\mathbf{G}_k^c$ 是二次型:

$$J(\mathbf{G}_k^c) = \text{Trace} \left(\Sigma_{k|k-1}^{\theta} - \Sigma_{k|k-1}^{\theta y} (\mathbf{G}_k^c)^T - \mathbf{G}_k^c (\Sigma_{k|k-1}^{\theta y})^T + \mathbf{G}_k^c \Sigma_{k|k-1}^y (\mathbf{G}_k^c)^T \right)$$

无约束最优即标准增益 $\bar{\mathbf{G}}_k = \Sigma_{k|k-1}^{\theta y} (\Sigma_{k|k-1}^y)^{-1}$ 。

约束推导-从二次规划到增益修正

把更新写成 $\mu_{k|k}^\theta = \mu_{k|k-1}^\theta + \mathbf{G}_k^c \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \mu_{k|k-1}^y$ 。目标函数关于 $\mathbf{G}_k^c$ 是二次型:

$$J(\mathbf{G}_k^c) = \text{Trace} \left(\Sigma_{k|k-1}^\theta - \Sigma_{k|k-1}^{\theta y} (\mathbf{G}_k^c)^T - \mathbf{G}_k^c (\Sigma_{k|k-1}^{\theta y})^T + \mathbf{G}_k^c \Sigma_{k|k-1}^y (\mathbf{G}_k^c)^T \right)$$

无约束最优即标准增益 $\bar{\mathbf{G}}_k = \Sigma_{k|k-1}^{\theta y} (\Sigma_{k|k-1}^y)^{-1}$ 。

有效集 + KKT

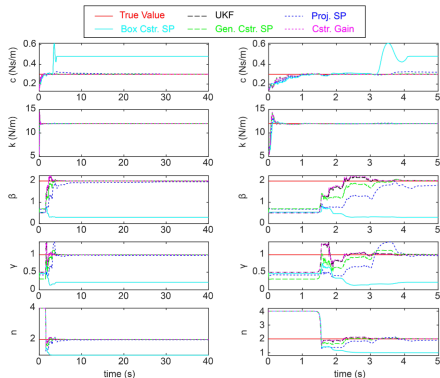
仅保留越界行 $\mathbf{A}_C$, 对等式约束 $\mathbf{A}_C(\mu_{k|k-1}^\theta + \mathbf{G}_k^c \mathbf{r}_k) = \mathbf{b}_C$ 写拉格朗日函数, 令导数为零, 解出

$$\mathbf{G}_k^c = \bar{\mathbf{G}}_k - \mathbf{A}_C^T (\mathbf{A}_C \mathbf{A}_C^T)^{-1} (\mathbf{A}_C \bar{\mu}_{k|k}^\theta - \mathbf{b}_C) \frac{\mathbf{r}_k^T (\Sigma_{k|k-1}^y)^{-1}}{\mathbf{r}_k^T (\Sigma_{k|k-1}^y)^{-1} \mathbf{r}_k}$$

代回 $\mu_{k|k}^\theta = \mu_{k|k-1}^\theta + \mathbf{G}_k^c \mathbf{r}_k$ 即得前一页的边界投影公式; 对箱型约束, $\mathbf{A}_C$ 行满秩, 逆矩阵总存在。

约束案例-SDOF Bouc-Wen (临界可行初值)

识别 c, k, β, γ, n , 约束 $c \geq 0, k \geq 0, \beta + \gamma \geq 0, \beta - \gamma \geq 0, n \geq 1$ 。初值取 $\beta_0 = \gamma_0 = 0.5$ (恰在 $\beta - \gamma = 0$ **边界**)，最易暴露各方法差异 (100 次蒙特卡洛)。

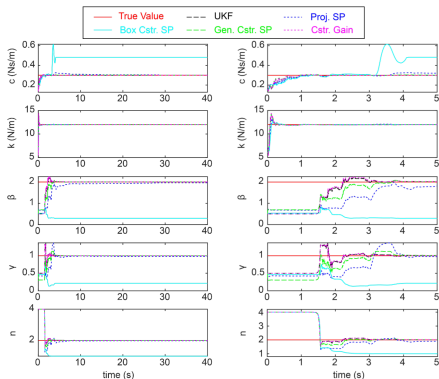


约束案例-SDOF Bouc-Wen (临界可行初值)

识别 c, k, β, γ, n , 约束 $c \geq 0, k \geq 0, \beta + \gamma \geq 0, \beta - \gamma \geq 0, n \geq 1$ 。初值取 $\beta_0 = \gamma_0 = 0.5$ (恰在 $\beta - \gamma = 0$ **边界**)，最易暴露各方法差异 (100 次蒙特卡洛)。

末态平均误差 (%) :

参数	UKF	箱型 SP	约束增益
c	0.14	46.3	0.11
k	0.02	0.64	0.01
β	0.57	77.6	0.31
γ	0.55	66.5	0.27
n	0.33	48.2	0.16



- 箱型 SP (青) **发散**，因为它破坏了分布的前两阶矩；
- 投影 SP (蓝点) 滞回参数误差大；
- **约束增益法误差最小、最稳健**；
- 标准 UKF 本例多数时刻恰好可行，故也不差。

协方差膨胀-应对突变与损伤

Kalman 滤波收敛后, 估计协方差 $\Sigma_{k|k}^{\theta}$ 降到很低, 对参数高度确信。一旦结构发生**突变** (损伤、附加力), 真实误差协方差 $\Sigma_{k|k}^{\epsilon}$ 突然增大, 出现

协方差膨胀-应对突变与损伤

Kalman 滤波收敛后, 估计协方差 $\Sigma_{k|k}^{\theta}$ 降到很低, 对参数高度确信。一旦结构发生**突变** (损伤、附加力), 真实误差协方差 $\Sigma_{k|k}^{\epsilon}$ 突然增大, 出现

$$\Sigma_{k|k}^{\epsilon} \succeq \Sigma_{k|k}^{\theta}$$

此时估计误差不再被协方差覆盖, 导致**滤波发散**, 参数停在错误值不再更新。

协方差膨胀-应对突变与损伤

Kalman 滤波收敛后, 估计协方差 $\Sigma_{k|k}^{\theta}$ 降到很低, 对参数高度确信。一旦结构发生**突变** (损伤、附加力), 真实误差协方差 $\Sigma_{k|k}^{\epsilon}$ 突然增大, 出现

$$\Sigma_{k|k}^{\epsilon} \succeq \Sigma_{k|k}^{\theta}$$

此时估计误差不再被协方差覆盖, 导致**滤波发散**, 参数停在错误值不再更新。

膨胀策略

检测到预测残差异常增大时, 把估计协方差适当**放大**到较保守水平, 例如将 $\Sigma_{k|k}^{\theta}$ 的对角元重置回初值, 恢复滤波器对数据的响应。

协方差膨胀-应对突变与损伤

Kalman 滤波收敛后, 估计协方差 $\Sigma_{k|k}^{\theta}$ 降到很低, 对参数高度确信。一旦结构发生**突变** (损伤、附加力), 真实误差协方差 $\Sigma_{k|k}^{\epsilon}$ 突然增大, 出现

$$\Sigma_{k|k}^{\epsilon} \succeq \Sigma_{k|k}^{\theta}$$

此时估计误差不再被协方差覆盖, 导致**滤波发散**, 参数停在错误值不再更新。

膨胀策略

检测到预测残差异常增大时, 把估计协方差适当**放大**到较保守水平, 例如将 $\Sigma_{k|k}^{\theta}$ 的对角元重置回初值, 恢复滤波器对数据的响应。

- 不膨胀: 突变后参数几乎不变, 无法跟踪损伤;
- 膨胀后: 参数重新收敛到突变后的真实值, $\pm 2\sigma$ 再次下降;
- 适用于隔震支座 LRB 等**在线损伤跟踪**场景。

协方差膨胀推导：真实误差 vs. 估计协方差

设真实参数为 $\hat{\theta}_k$ ，定义先验/后验**真实误差** $\epsilon_{k|k-1}^{\theta} = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k-1}$ ，
 $\epsilon_{k|k}^{\theta} = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k}$ ，其协方差递推为

协方差膨胀推导：真实误差 vs. 估计协方差

设真实参数为 $\hat{\theta}_k$ ，定义先验/后验**真实误差** $\epsilon_{k|k-1}^{\theta} = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k-1}$ ，
 $\epsilon_{k|k}^{\theta} = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k}$ ，其协方差递推为

$$\Sigma_{k|k-1}^{\epsilon} = \Sigma_{k-1|k-1}^{\epsilon} + \Sigma^{\hat{w}}, \quad \Sigma_{k|k}^{\epsilon} = \Sigma_{k|k-1}^{\epsilon} - \mathbf{G}_k (\text{Cov}[\mathcal{G}] + \Sigma^{\hat{v}}) \mathbf{G}_k^T$$

与滤波器内部协方差 Σ^{θ} 的差记为 $\mathbf{D} = \Sigma^{\epsilon} - \Sigma^{\theta}$ ，则

协方差膨胀推导：真实误差 vs. 估计协方差

设真实参数为 $\hat{\theta}_k$ ，定义先验/后验**真实误差** $\epsilon_{k|k-1}^\theta = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k-1}$ ，
 $\epsilon_{k|k}^\theta = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k}$ ，其协方差递推为

$$\Sigma_{k|k-1}^\epsilon = \Sigma_{k-1|k-1}^\epsilon + \Sigma^{\hat{w}}, \quad \Sigma_{k|k}^\epsilon = \Sigma_{k|k-1}^\epsilon - \mathbf{G}_k (\text{Cov}[\mathcal{G}] + \Sigma^{\hat{v}}) \mathbf{G}_k^T$$

与滤波器内部协方差 Σ^θ 的差记为 $\mathbf{D} = \Sigma^\epsilon - \Sigma^\theta$ ，则

$$\mathbf{D}_{k|k-1} = \mathbf{D}_{k-1|k-1} + (\Sigma^{\hat{w}} - \Sigma^w), \quad \mathbf{D}_{k|k} = \mathcal{H}_k \mathbf{D}_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + \mathbf{G}_k (\Sigma^{\hat{v}} - \Sigma^v)^{-1} \mathbf{G}_k^T$$

其中 $\mathcal{H}_k = \Sigma_{k|k}^\theta (\Sigma_{k|k-1}^\theta)^{-1}$ 。

协方差膨胀推导：真实误差 vs. 估计协方差

设真实参数为 $\hat{\theta}_k$ ，定义先验/后验**真实误差** $\epsilon_{k|k-1}^\theta = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k-1}$ ，
 $\epsilon_{k|k}^\theta = \hat{\theta}_k - \theta_{k|k}$ ，其协方差递推为

$$\Sigma_{k|k-1}^\epsilon = \Sigma_{k-1|k-1}^\epsilon + \Sigma^{\hat{w}}, \quad \Sigma_{k|k}^\epsilon = \Sigma_{k|k-1}^\epsilon - \mathbf{G}_k (\text{Cov}[\mathcal{G}] + \Sigma^{\hat{v}}) \mathbf{G}_k^T$$

与滤波器内部协方差 Σ^θ 的差记为 $\mathbf{D} = \Sigma^\epsilon - \Sigma^\theta$ ，则

$$\mathbf{D}_{k|k-1} = \mathbf{D}_{k-1|k-1} + (\Sigma^{\hat{w}} - \Sigma^w), \quad \mathbf{D}_{k|k} = \mathcal{H}_k \mathbf{D}_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + \mathbf{G}_k (\Sigma^{\hat{v}} - \Sigma^v)^{-1} \mathbf{G}_k^T$$

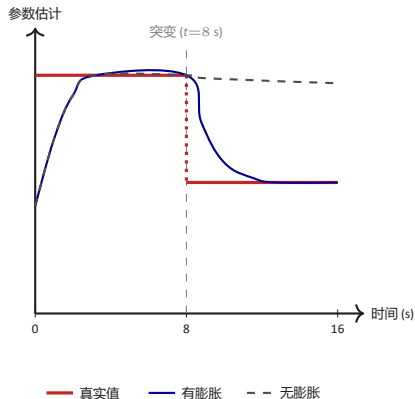
其中 $\mathcal{H}_k = \Sigma_{k|k}^\theta (\Sigma_{k|k-1}^\theta)^{-1}$ 。

结论

若 $\Sigma^{\hat{w}} \preceq \Sigma^w$ 且 $\Sigma^{\hat{v}} \preceq \Sigma^v$ ，则 $\mathbf{D} \preceq \mathbf{0}$ （估计协方差覆盖真实误差），即**渐近最优**。突变发生时该不等式被破坏， $\mathbf{D} \succeq \mathbf{0}$ 导致发散；**膨胀 Σ^θ 恢复 $\mathbf{D} \preceq \mathbf{0}$** 。

协方差膨胀案例-隔震建筑 LRB 突变损伤

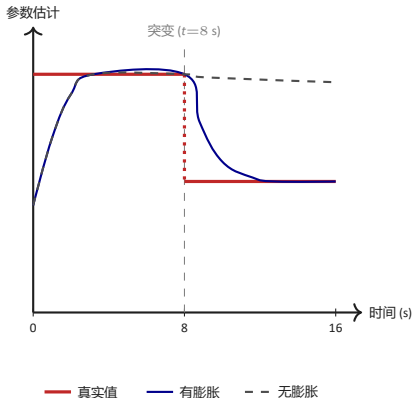
四层隔震建筑，铅芯橡胶支座（LRB）以 Bouc-Wen 描述恢复力；输入 1995 Kobe Takatori 记录，观测二层绝对加速度（含 10% RMS 噪声）。 $t = 8\text{ s}$ 引入参数突变模拟**损伤**，对比有/无协方差膨胀。



(示意图：单个参数的后验估计随时间变化)

协方差膨胀案例-隔震建筑 LRB 突变损伤

四层隔震建筑，铅芯橡胶支座（LRB）以 Bouc-Wen 描述恢复力；输入 1995 Kobe Takatori 记录，观测二层绝对加速度（含 10% RMS 噪声）。 $t = 8\text{ s}$ 引入参数突变模拟**损伤**，对比有/无协方差膨胀。



(示意图：单个参数的后验估计随时间变化)

- **无膨胀**：收敛后 Σ^θ 已很小、滤波器不再响应新数据，突变后估计停在旧值，无法跟踪损伤；
- **有膨胀**：预测残差异常增大时**重置/放大** Σ^θ ，滤波器恢复响应，估计再收敛到新真实值；
- LRB 力-位移**滞回环**随之复现，验证损伤被正确识别。

Tikhonov (ℓ_2) 正则化-伪观测实现

数据有限或模型不一致时，修正问题**病态**、易过拟合。Tikhonov 正则化在目标函数中加入 ℓ_2 罚项：

Tikhonov (ℓ_2) 正则化-伪观测实现

数据有限或模型不一致时，修正问题**病态**、易过拟合。Tikhonov 正则化在目标函数中加入 ℓ_2 罚项：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \left\| (\boldsymbol{\Sigma}^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})) \right\|_2^2 + \beta \|\boldsymbol{\theta}\|_2^2$$

Tikhonov (ℓ_2) 正则化-伪观测实现

数据有限或模型不一致时，修正问题**病态**、易过拟合。Tikhonov 正则化在目标函数中加入 ℓ_2 罚项：

$$\min_{\theta} \left\| (\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\theta)) \right\|_2^2 + \beta \|\theta\|_2^2$$

UKF 中的伪观测技巧

把对参数自身的人工观测 $\mathbf{0} = \theta + \mathbf{v}^\theta$ 拼到原观测后，记 $\mathbf{z} = \mathcal{H}(\theta) + \zeta$ ：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(\theta) \\ \theta \end{pmatrix} + \zeta, \quad \Sigma^\zeta = \begin{pmatrix} \Sigma^v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta^{-1} \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

对增广系统的加权最小二乘正好分解为数据项 + 罚项：

$$\left\| (\Sigma^\zeta)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{z} - \mathcal{H}(\theta)) \right\|_2^2 = \left\| (\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\theta)) \right\|_2^2 + \beta \|\theta\|_2^2$$

Tikhonov (ℓ_2) 正则化-伪观测实现

数据有限或模型不一致时，修正问题**病态**、易过拟合。Tikhonov 正则化在目标函数中加入 ℓ_2 罚项：

$$\min_{\theta} \|(\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{y} - \mathcal{G}(\theta))\|_2^2 + \beta \|\theta\|_2^2$$

UKF 中的伪观测技巧

把对参数自身的人工观测 $\mathbf{0} = \theta + \mathbf{v}^\theta$ 拼到原观测后，记 $\mathbf{z} = \mathcal{H}(\theta) + \zeta$ ：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(\theta) \\ \theta \end{pmatrix} + \zeta, \quad \Sigma^\zeta = \begin{pmatrix} \Sigma^v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta^{-1} \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

对增广系统的加权最小二乘正好分解为数据项 + 罚项：

$$\|(\Sigma^\zeta)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{z} - \mathcal{H}(\theta))\|_2^2 = \|(\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{y} - \mathcal{G}(\theta))\|_2^2 + \beta \|\theta\|_2^2$$

效果：对增广观测直接套用 UKF 即求解 Tikhonov 问题；抑制无关参数的虚假改动，使解更平滑。

稀疏 (ℓ_p) 正则化-面向损伤识别

损伤通常只发生在**少数构件**，对应参数向量是**稀疏**的。用 ℓ_p ($0 < p \leq 1$) 罚项促进稀疏：

稀疏 (ℓ_p) 正则化-面向损伤识别

损伤通常只发生在**少数构件**，对应参数向量是**稀疏**的。用 ℓ_p ($0 < p \leq 1$) 罚项促进稀疏：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \left\| (\boldsymbol{\Sigma}^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})) \right\|_2^2 + \beta \|\boldsymbol{\theta}\|_p^p$$

稀疏 (ℓ_p) 正则化-面向损伤识别

损伤通常只发生在**少数构件**，对应参数向量是**稀疏**的。用 ℓ_p ($0 < p \leq 1$) 罚项促进稀疏：

$$\min_{\theta} \left\| (\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\theta)) \right\|_2^2 + \beta \|\theta\|_p^p$$

变量变换：把 ℓ_p 化为 ℓ_2

令 $\alpha_i = s(\theta_i) = \text{sgn}(\theta_i) |\theta_i|^{p/2}$ ，则 $\|\alpha\|_2^2 = \sum_i |\theta_i|^p = \|\theta\|_p^p$ 。于是

$$\min_{\alpha} \left\| (\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\mathcal{S}^{-1}(\alpha))) \right\|_2^2 + \beta \|\alpha\|_2^2$$

可再用前述 Tikhonov 伪观测的 UKF 求解。

稀疏 (ℓ_p) 正则化-面向损伤识别

损伤通常只发生在**少数构件**，对应参数向量是**稀疏**的。用 ℓ_p ($0 < p \leq 1$) 罚项促进稀疏：

$$\min_{\theta} \left\| (\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\theta)) \right\|_2^2 + \beta \|\theta\|_p^p$$

变量变换：把 ℓ_p 化为 ℓ_2

令 $\alpha_i = s(\theta_i) = \text{sgn}(\theta_i) |\theta_i|^{p/2}$ ，则 $\|\alpha\|_2^2 = \sum_i |\theta_i|^p = \|\theta\|_p^p$ 。于是

$$\min_{\alpha} \left\| (\Sigma^v)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{y} - \mathcal{G}(\mathcal{S}^{-1}(\alpha))) \right\|_2^2 + \beta \|\alpha\|_2^2$$

可再用前述 Tikhonov 伪观测的 UKF 求解。

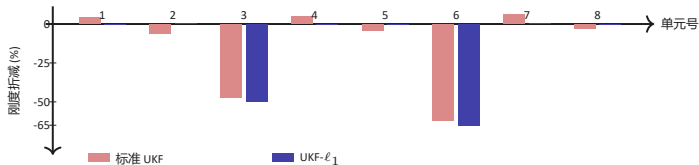
- 标准 UKF：损伤位置/程度大致正确，但完好构件有虚假改动；
- UKF- ℓ_2 ：完好构件改动收敛到 $\pm 1\%$ 内；
- UKF- ℓ_1 ：刻画**稀疏损伤**，完好构件参数近似为零。

正则化案例—桥梁结构损伤识别（稀疏）

32 m 钢桁架桥，若干竖杆发生损伤（此处示意单元 #3 折减 50%、#6 折减 65%）；用前两阶频率与振型识别，正则化参数由 L 曲线法确定。

正则化案例—桥梁结构损伤识别（稀疏）

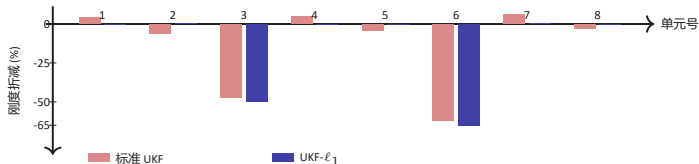
32 m 钢桁架桥，若干竖杆发生损伤（此处示意单元 #3 折减 50%、#6 折减 65%）；用前两阶频率与振型识别，正则化参数由 L 曲线法确定。



(示意图：各单元识别出的刚度折减)

正则化案例—桥梁结构损伤识别（稀疏）

32 m 钢桁架桥，若干竖杆发生损伤（此处示意单元 #3 折减 50%、#6 折减 65%）；用前两阶频率与振型识别，正则化参数由 L 曲线法确定。



(示意图：各单元识别出的刚度折减)

- **标准 UKF**：损伤位置/程度大致正确，但完好单元出现**虚假折减** ($\pm$ 数%);
- **UKF- ℓ_2** ：完好单元改动压到 $\pm 1\%$ 内;
- **UKF- ℓ_1** ：完好单元 ≈ 0 ，**稀疏损伤**被干净刻画，最易解释;
- 时域（加速度）与频域（模态）两种数据配 ℓ_1 正则化均可成功定位损伤。

比较、流程与选用

时域、频域与 LM 的关系

方法	观测对象	需要导数	适合场景
时域 EKF/UKF	楼层响应 y_k	EKF 需要	在线识别、损伤跟踪
频域 EKF/UKF	模态残差 $r(\theta)$	EKF 需要	模态修正程序滤波化
LM / Gauss-Newton	模态残差	是	离线校准、一次性试验

时域、频域与 LM 的关系

方法	观测对象	需要导数	适合场景
时域 EKF/UKF	楼层响应 y_k	EKF 需要	在线识别、损伤跟踪
频域 EKF/UKF	模态残差 $r(\theta)$	EKF 需要	模态修正程序滤波化
LM / Gauss-Newton	模态残差	是	离线校准、一次性试验

- **时域方法**直接使用 $a_g(t)$ 和楼层加速度时程, 状态为 $q, \dot{q}, \theta$;
- **频域方法**不直接传播位移速度, 而是把 $0 = r(\theta) + v$ 当作伪观测;
- **LM/GN** 是批处理模型修正, 可作为频域结果的离线基准。

时域、频域与 LM 的关系

方法	观测对象	需要导数	适合场景
时域 EKF/UKF	楼层响应 y_k	EKF 需要	在线识别、损伤跟踪
频域 EKF/UKF	模态残差 $r(\theta)$	EKF 需要	模态修正程序滤波化
LM / Gauss-Newton	模态残差	是	离线校准、一次性试验

- **时域方法**直接使用 $a_g(t)$ 和楼层加速度时程, 状态为 $q, \dot{q}, \theta$;
- **频域方法**不直接传播位移速度, 而是把 $0 = r(\theta) + v$ 当作伪观测;
- **LM/GN** 是批处理模型修正, 可作为频域结果的离线基准。

本质统一

三者都在让 $r(\theta)$ 变小; 差别只在于如何使用数据、先验和非线性信息。

频域类比修正的完整流程

1. **生成或读取实测模态**: 由真实结构得到 $\omega_i^{\text{exp}}, \Phi_i^{\text{exp}}$;
2. **定义参数**: $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$, 初值 $\theta_0 = \mathbf{0}$;
3. **定义残差**: 调用 `resid_vec(theta, data)`;
4. **选择滤波器**: EKF 调 `residual_jacobian`, UKF 调 sigma 点残差传播;
5. **递推更新**: 每轮以 $\mathbf{0} - \mathbf{r}(\hat{\theta})$ 为预测残差更新 $\hat{\theta}, \Sigma^\theta$;
6. **验证模型**: 比较修正前后频率、振型、MAC 与刚度参数。

频域类比修正的完整流程

1. **生成或读取实测模态**: 由真实结构得到 $\omega_i^{\text{exp}}, \Phi_i^{\text{exp}}$;
2. **定义参数**: $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T$, 初值 $\theta_0 = 0$;
3. **定义残差**: 调用 `resid_vec(theta, data)`;
4. **选择滤波器**: EKF 调 `residual_jacobian`, UKF 调 sigma 点残差传播;
5. **递推更新**: 每轮以 $0 - r(\hat{\theta})$ 为预测残差更新 $\hat{\theta}, \Sigma^{\theta}$;
6. **验证模型**: 比较修正前后频率、振型、MAC 与刚度参数。

课堂实验建议

先运行原脚本中的 GN/LM 得到离线基准; 再实现 EKF/UKF 递推版本, 比较不同 $\Sigma_{0|0}^{\theta}, \Sigma_k^w, \Sigma_r^v$ 对收敛速度和最终参数的影响。

模型修正不能只看参数是否接近真值；实际工程中真值通常未知，因此更应检查修正后的动力特性是否匹配试验。

频率误差

$$e_{\omega,i} = \frac{\omega_i^{\text{exp}} - \omega_i(\hat{\theta})}{\omega_i^{\text{exp}}}$$

振型误差

$$\Delta\phi_i = \phi_i^{\text{exp}} - \phi_i(\hat{\theta})$$

模型修正不能只看参数是否接近真值；实际工程中真值通常未知，因此更应检查修正后的动力特性是否匹配试验。

频率误差

$$e_{\omega,i} = \frac{\omega_i^{\text{exp}} - \omega_i(\hat{\theta})}{\omega_i^{\text{exp}}}$$

振型误差

$$\Delta\phi_i = \phi_i^{\text{exp}} - \phi_i(\hat{\theta})$$

MAC 指标

$$\text{MAC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a}^T \mathbf{b}|^2}{(\mathbf{a}^T \mathbf{a})(\mathbf{b}^T \mathbf{b})}$$

- MAC 越接近 1，振型越一致；
- MAC 对振型整体幅值不敏感；
- 可用于监控模态配对是否出错。

对应代码：Updating/mac.m 与 Updating/modal_solve.m。

对 Updating/main_modal Updating.m 中四层剪切框架算例，从名义模型 $\theta_0 = 0$ 出发，识别得到的刚度相对修正系数为：

频域模型修正结果-刚度参数

对 Updating/main_modal Updating.m 中四层剪切框架算例，从名义模型 $\theta_0 = 0$ 出发，识别得到的刚度相对修正系数为：

层号	真实值	初始值	GN/LM/Newton	EKF	UKF
1	-0.2000	0	-0.1986	-0.2016	-0.2015
2	0.0500	0	0.0492	0.0510	0.0515
3	-0.3500	0	-0.3447	-0.3446	-0.3445
4	0.1000	0	0.0885	0.0901	0.0904

(lsqnonlin 结果与 GN/LM/Newton 一致，从略。)

频域模型修正结果-刚度参数

对 Updating/main_modal Updating.m 中四层剪切框架算例，从名义模型 $\theta_0 = 0$ 出发，识别得到的刚度相对修正系数为：

层号	真实值	初始值	GN/LM/Newton	EKF	UKF
1	-0.2000	0	-0.1986	-0.2016	-0.2015
2	0.0500	0	0.0492	0.0510	0.0515
3	-0.3500	0	-0.3447	-0.3446	-0.3445
4	0.1000	0	0.0885	0.0901	0.0904

(lsqnonlin 结果与 GN/LM/Newton 一致，从略。)

- **EKF/UKF 递推结果与批量 GN/LM/Newton 基本一致**，三种路线收敛到同一最优；
- 前三层修正量都很接近真值，第四层略有偏差（测量噪声与有限阶模态所致）；
- EKF 与 UKF 互相吻合，说明二者都能从模态残差中提取刚度变化信息。

修正前后固有频率对比：

阶次	实测	初始	修正后
1	1.0131	1.1055	1.0156
2	2.8450	3.1831	2.8421
3	4.9082	4.8768	4.9015

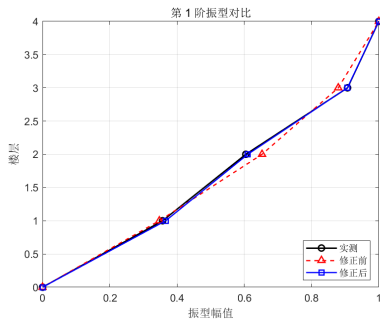
单位：Hz。修正后（GN）基本贴近实测；
EKF/UKF 修正后频率与之几乎一致（如第
1 阶 EKF 1.0150、UKF 1.0151）。

频域模型修正结果-频率与振型

修正前后固有频率对比：

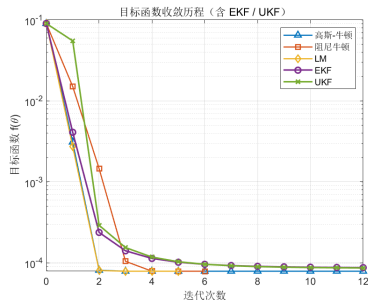
阶次	实测	初始	修正后
1	1.0131	1.1055	1.0156
2	2.8450	3.1831	2.8421
3	4.9082	4.8768	4.9015

单位：Hz。修正后（GN）基本贴近实测；
EKF/UKF 修正后频率与之几乎一致（如第
1 阶 EKF 1.0150、UKF 1.0151）。



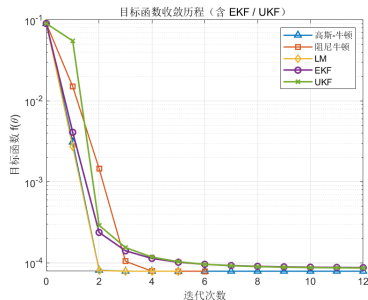
第 1 阶振型也从修正前向实测靠近。

频域模型修正结果-收敛过程

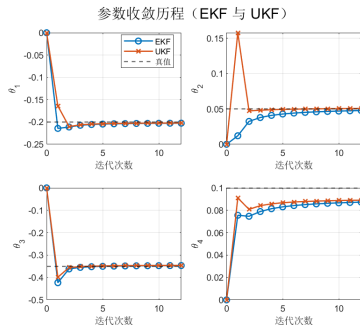


目标函数 $f(\theta)$ 随迭代快速下降；**EKF、UKF** 与 **GN、Newton、LM** 几乎同步收敛，约 5~6 步即达同一水平。

频域模型修正结果-收敛过程



目标函数 $f(\theta)$ 随迭代快速下降; **EKF、UKF** 与 **GN、Newton、LM** 几乎同步收敛, 约 5~6 步即达同一水平。



EKF 与 UKF 的四个 θ_s 都逐步收敛到真实修正量 (虚线), 二者轨迹几乎重合。

结果由 Updating/main_modal Updating.m 与 main_modal Updating_kf.m 生成。

计算量与稳健性对比

指标	EKF	UKF
每步模型求解	解析 Jacobian 时少；数值差分约 $2n_\theta + 1$ 次	固定 $2n_\theta + 1$ 次
Jacobian 推导	需要，或用中心差分替代	不需要
对初值偏差	局部线性化，偏差大时较敏感	sigma 点覆盖局部不确定性，更稳健
对模态不连续	Jacobian 可能不稳定	仍需模态配对，但不显式求导
调参重点	$\Sigma_0^\theta, \Sigma^w, \Sigma_r^v$ 与差分步长	$\Sigma_0^\theta, \Sigma^w, \Sigma_r^v, \alpha, \beta, \kappa$

综合而言，对四层框架这类低维参数问题，UKF 的额外计算量通常可接受；若参数维数很高且有可靠灵敏度公式，EKF 或批量 LM 更省。

如何选用

- **有地震输入与楼层响应时程**：优先使用时域 EKF/UKF，把 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}$ 作为增广状态；
- **只有频率、振型等模态参数**：使用频域类比修正，把 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}$ 写成伪观测；
- **已有试验数据、只需一次离线修正**：GN/LM 仍是清晰的基准方法；
- **Jacobian 容易推导且模型近线性**：EKF 计算更直接；
- **模态映射复杂、初值偏差较大、导数不稳定**：UKF 更稳健，也更容易包装已有黑箱程序；
- **参数必须满足物理约束**：可对 θ_s 加边界，或改用 $k_s = k_s^{\text{nom}} \exp(\eta_s)$ 保证刚度为正。

如何选用

- **有地震输入与楼层响应时程**：优先使用时域 EKF/UKF，把 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \theta$ 作为增广状态；
- **只有频率、振型等模态参数**：使用频域类比修正，把 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\theta) + \mathbf{v}$ 写成伪观测；
- **已有试验数据、只需一次离线修正**：GN/LM 仍是清晰的基准方法；
- **Jacobian 容易推导且模型近线性**：EKF 计算更直接；
- **模态映射复杂、初值偏差较大、导数不稳定**：UKF 更稳健，也更容易包装已有黑箱程序；
- **参数必须满足物理约束**：可对 θ_s 加边界，或改用 $k_s = k_s^{\text{nom}} \exp(\eta_s)$ 保证刚度为正。

归纳

时域方法是动力状态估计；频域方法把模态残差类比成观测方程。二者都可以用 EKF/UKF 表达模型修正中的不确定性传播。

小结

小结-EKF/UKF 模型修正

- 时域与频域共用**同一套待修正参数** θ ; 时域把 $q, \dot{q}, \theta$ 作为增广状态, 直接利用 groundAcc 与 relFloorAcc 做参数识别;
- 时域既能修正**线性**四层框架 (阻尼 + 刚度), 也能识别**非线性**Bouc-Wen 滞回参数 c, k, β, γ, n (用光滑化模型便于 EKF);
- 频域把 $\mathbf{0} = \mathbf{r}(\theta) + \mathbf{v}$ 视作伪观测; EKF 需 $\mathbf{H} = \partial \mathbf{r} / \partial \theta$, UKF 只需 $2n_\theta + 1$ 个 sigma 点传播残差;
- $\Sigma_{0|0}^\theta, \Sigma_k^w, \Sigma_r^v$ 分别代表初始可信度、参数漂移和测量可信度;
- **三类扩展**让框架更实用: 约束 (边界投影)、协方差膨胀 (应对突变损伤)、正则化 (Tikhonov ℓ_2 与稀疏 ℓ_p);
- 修正效果应通过频率/振型误差、MAC、响应复现和物理合理性共同验证。

谢谢

提问与讨论