

非线性卡尔曼滤波

扩展卡尔曼滤波 (EKF) 与无迹卡尔曼滤波 (UKF)

李丹

2026 年 6 月 1 日

引言：非线性系统的状态估计

扩展卡尔曼滤波 (EKF)

蒙特卡洛方法（真值参照）

无迹卡尔曼滤波 (UKF)

二维算例：极坐标 $\rightarrow$ 直角坐标

工程算例：Bouc-Wen 滞回系统辨识

滤波算法的工程实现与优化

小结

引言：非线性系统的状态估计

为何标准卡尔曼滤波不够用

线性卡尔曼滤波假定系统方程与观测方程均为**线性**:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

为何标准卡尔曼滤波不够用

线性卡尔曼滤波假定系统方程与观测方程均为**线性**：

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

现实工程中大量系统呈**非线性**特征：

- 桥梁支座/橡胶隔震层的恢复力—位移本构曲线；
- 钢筋混凝土构件进入屈服后的滞回行为；
- 单摆、机器人等**大幅运动**的几何非线性；
- GPS、雷达定位中的**距离/角度**非线性观测。

为何标准卡尔曼滤波不够用

线性卡尔曼滤波假定系统方程与观测方程均为**线性**：

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

现实工程中大量系统呈**非线性**特征：

- 桥梁支座/橡胶隔震层的恢复力—位移本构曲线；
- 钢筋混凝土构件进入屈服后的滞回行为；
- 单摆、机器人等**大幅运动**的几何非线性；
- GPS、雷达定位中的**距离/角度**非线性观测。

核心挑战：高斯随机变量经过非线性变换后**不再是高斯分布**，无法直接套用线性卡尔曼递推。

两条主流路线

扩展卡尔曼滤波 (EKF, 1960s)

在当前估计点处做**一阶 Taylor 展开**，把非线性系统局部线性化，再套用标准 KF 递推。

两条主流路线

扩展卡尔曼滤波 (EKF, 1960s)

在当前估计点处做**一阶 Taylor 展开**，把非线性系统局部线性化，再套用标准 KF 递推。

无迹卡尔曼滤波 (UKF, 1997, Julier & Uhlmann)

通过**确定性采样**（无迹变换）传播状态分布的统计矩，无需求 Jacobian，能捕捉到**二阶以上**非线性效应。

扩展卡尔曼滤波 (EKF)

考虑一般形式的非线性离散系统：

$$\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1}), \quad \mathbf{y}_n = h(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$$

考虑一般形式的非线性离散系统：

$$\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1}), \quad \mathbf{y}_n = h(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$$

其中 $\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n$ 为零均值、互不相关的高斯白噪声：

$$\mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^{\mathbf{w}}), \quad \mathbf{v}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^{\mathbf{v}}), \quad \mathbb{E}[\mathbf{w}_m \mathbf{v}_n^T] = \mathbf{0} \quad \forall m, n$$

考虑一般形式的非线性离散系统：

$$\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1}), \quad \mathbf{y}_n = h(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$$

其中 $\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n$ 为零均值、互不相关的高斯白噪声：

$$\mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^{\mathbf{w}}), \quad \mathbf{v}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^{\mathbf{v}}), \quad \mathbb{E}[\mathbf{w}_m \mathbf{v}_n^T] = \mathbf{0} \quad \forall m, n$$

与线性 KF 的差别：

- f, h 为任意**可微**的非线性函数；
- 噪声不一定是加性，可**进入非线性函数**内部。

非线性系统模型

考虑一般形式的非线性离散系统：

$$\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1}), \quad \mathbf{y}_n = h(\mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n)$$

其中 $\mathbf{w}_n, \mathbf{v}_n$ 为零均值、互不相关的高斯白噪声：

$$\mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^{\mathbf{w}}), \quad \mathbf{v}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_n^{\mathbf{v}}), \quad \mathbb{E}[\mathbf{w}_m \mathbf{v}_n^T] = \mathbf{0} \quad \forall m, n$$

与线性 KF 的差别：

- f, h 为任意**可微**的非线性函数；
- 噪声不一定是加性，可**进入非线性函数**内部。

EKF 的策略：在当前最佳估计点处做 Taylor 展开 $\Rightarrow$ 近似得到**时变线性系统** $\Rightarrow$ 套用标准 KF。

系统方程线性化

在 $\mathbf{x}_{n-1} = \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{0}$ 处展开, 舍去高阶项:

$$\mathbf{x}_n \approx f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}) + \mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}$$

系统方程线性化

在 $\mathbf{x}_{n-1} = \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{0}$ 处展开, 舍去高阶项:

$$\mathbf{x}_n \approx f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}) + \mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}$$

Jacobian 矩阵 (在估计点处求值):

$$\mathbf{A}_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{0}}, \quad \mathbf{\Gamma}_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{0}}$$

系统方程线性化

在 $\mathbf{x}_{n-1} = \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{0}$ 处展开, 舍去高阶项:

$$\mathbf{x}_n \approx f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}) + \mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}$$

Jacobian 矩阵 (在估计点处求值):

$$\mathbf{A}_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{0}}, \quad \mathbf{\Gamma}_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{0}}$$

等价线性形式

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} + \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0}) - \mathbf{A}_{n-1}\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{n-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{\Sigma}_{n-1}^{\mathbf{w}}\mathbf{\Gamma}_{n-1}^T)$$

系统方程线性化

在 $\mathbf{x}_{n-1} = \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{0}$ 处展开, 舍去高阶项:

$$\mathbf{x}_n \approx f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}) + \mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}$$

Jacobian 矩阵 (在估计点处求值):

$$\mathbf{A}_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{0}}, \quad \mathbf{\Gamma}_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{0}}$$

等价线性形式

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} + \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0}) - \mathbf{A}_{n-1}\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{n-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Gamma}_{n-1}\mathbf{\Sigma}_{n-1}^{\mathbf{w}}\mathbf{\Gamma}_{n-1}^T)$$

要点: 噪声协方差通过 $\mathbf{\Gamma}$ 投射到状态空间, $\tilde{\mathbf{u}}$ 收纳所有已知非线性偏差。

在 $\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 处展开:

$$\mathbf{y}_n \approx h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{C}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}) + \mathbf{R}_n\mathbf{v}_n$$

在 $\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 处展开:

$$\mathbf{y}_n \approx h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{C}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}) + \mathbf{R}_n\mathbf{v}_n$$

Jacobian:

$$\mathbf{C}_n = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}}, \quad \mathbf{R}_n = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}}$$

观测方程线性化

在 $\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 处展开:

$$\mathbf{y}_n \approx h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{C}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}) + \mathbf{R}_n\mathbf{v}_n$$

Jacobian:

$$\mathbf{C}_n = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}}, \quad \mathbf{R}_n = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}}$$

等价线性观测:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{z}_n + \tilde{\mathbf{v}}_n$$

其中 $\mathbf{z}_n = h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}) - \mathbf{C}_n\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}$, $\tilde{\mathbf{v}}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n\Sigma_n^v\mathbf{R}_n^T)$ 。

观测方程线性化

在 $\mathbf{x}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 处展开:

$$\mathbf{y}_n \approx h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}) + \mathbf{C}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}) + \mathbf{R}_n\mathbf{v}_n$$

Jacobian:

$$\mathbf{C}_n = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}}, \quad \mathbf{R}_n = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}}$$

等价线性观测:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{z}_n + \tilde{\mathbf{v}}_n$$

其中 $\mathbf{z}_n = h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}) - \mathbf{C}_n\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}$, $\tilde{\mathbf{v}}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n\Sigma_n^v\mathbf{R}_n^T)$ 。

两次线性化的展开点不同: 系统方程在**上一步后验**处展开; 观测方程在**当前先验**处展开——与 KF 预测/校正交替的节奏一致。

初始化: $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

初始化: $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

预测 (时间更新)

1. 计算 Jacobian $\mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{\Gamma}_{n-1}$ (在 $\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$ 处);
2. 用**非线性方程**传递均值: $\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0})$;
3. 用**线性化方程**传递协方差:

$$\Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{n-1} \Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}_{n-1}^T + \mathbf{\Gamma}_{n-1} \Sigma_{n-1}^{\mathbf{w}} \mathbf{\Gamma}_{n-1}^T。$$

初始化: $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

预测 (时间更新)

1. 计算 Jacobian $\mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{\Gamma}_{n-1}$ (在 $\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$ 处);
2. 用**非线性方程**传递均值: $\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0})$;
3. 用**线性化方程**传递协方差:
$$\Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{n-1} \Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{A}_{n-1}^T + \mathbf{\Gamma}_{n-1} \Sigma_{n-1}^{\mathbf{w}} \mathbf{\Gamma}_{n-1}^T。$$

校正 (测量更新)

4. 计算 Jacobian $\mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n$ (在 $\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}$ 处);
5. 卡尔曼增益: $\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_n^T \left(\mathbf{C}_n \Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} \mathbf{C}_n^T + \mathbf{R}_n \Sigma_n^{\mathbf{v}} \mathbf{R}_n^T \right)^{-1}$;
6. 状态更新 (**残差用非线性 h**): $\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{G}_n (\mathbf{y}_n - h(\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \mathbf{0}))$;
7. 协方差更新 (Joseph 形式数值稳定)。

优点

- 结构简单，与线性 KF 完全同构；
- 计算量与线性 KF 相当（多一次 Jacobian）；
- 对**弱非线性**问题精度足够；
- 工程实践成熟（导航、跟踪、SLAM 等）。

优点

- 结构简单，与线性 KF 完全同构；
- 计算量与线性 KF 相当（多一次 Jacobian）；
- 对**弱非线性**问题精度足够；
- 工程实践成熟（导航、跟踪、SLAM 等）。

局限

- 仅保留一阶项 $\Rightarrow$ **强非线性失效**；
- Jacobian 解析计算**繁琐**，复杂模型易出错；
- 若 $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 在展开点为零（如 $y = x^2$ 在 $x = 0$ ）， $\Rightarrow$ **协方差退化**为零；
- 不适用于**不可微**的非线性（开关、饱和等）。

优点

- 结构简单，与线性 KF 完全同构；
- 计算量与线性 KF 相当（多一次 Jacobian）；
- 对**弱非线性**问题精度足够；
- 工程实践成熟（导航、跟踪、SLAM 等）。

局限

- 仅保留一阶项 $\Rightarrow$ **强非线性失效**；
- Jacobian 解析计算**繁琐**，复杂模型易出错；
- 若 $\partial f / \partial \mathbf{x}$ 在展开点为零（如 $y = x^2$ 在 $x = 0$ ）， $\Rightarrow$ **协方差退化**为零；
- 不适用于**不可微**的非线性（开关、饱和等）。

这些局限催生了无迹卡尔曼滤波（UKF）等高阶方法。

蒙特卡洛方法（真值参照）

蒙特卡洛方法：用随机样本传播分布

蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真： 直接用大量随机样本逼近分布。

蒙特卡洛方法：用随机样本传播分布

蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真：直接用大量随机样本逼近分布。

三步走

1. **抽样**：从输入分布抽 N 个样本 $\mathbf{x}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$;
2. **传递**：每个样本**独立**穿过非线性函数 $\mathbf{y}^{(i)} = h(\mathbf{x}^{(i)})$;
3. **重建**：用输出样本估计矩

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} \approx \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{y}^{(i)}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} \approx \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})(\mathbf{y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^T$$

蒙特卡洛方法：用随机样本传播分布

蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真：直接用大量随机样本逼近分布。

三步走

1. **抽样**：从输入分布抽 N 个样本 $\mathbf{x}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$;
2. **传递**：每个样本**独立**穿过非线性函数 $\mathbf{y}^{(i)} = h(\mathbf{x}^{(i)})$;
3. **重建**：用输出样本估计矩

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}} \approx \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{y}^{(i)}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}} \approx \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})(\mathbf{y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}})^T$$

- **优点**： $N \rightarrow \infty$ 时**无偏收敛**到真值（误差 $\sim O(1/\sqrt{N})$ ），是非线性传播的**基准**；
- **代价**：精度依赖样本量，常需 $N \sim 10^4 - 10^6$ ，实时滤波太慢。

蒙特卡洛方法：用随机样本传播分布

蒙特卡洛 (Monte Carlo) 仿真：直接用大量随机样本逼近分布。

三步走

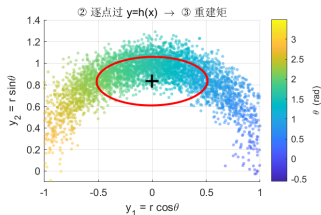
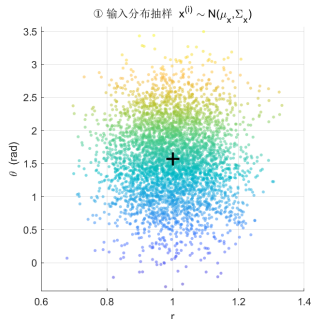
1. **抽样：**从输入分布抽 N 个样本 $\mathbf{x}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$;
2. **传递：**每个样本**独立**穿过非线性函数 $\mathbf{y}^{(i)} = h(\mathbf{x}^{(i)})$;
3. **重建：**用输出样本估计矩

$$\boldsymbol{\mu}_y \approx \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{y}^{(i)}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_y \approx \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_y)(\mathbf{y}^{(i)} - \boldsymbol{\mu}_y)^T$$

- **优点：** $N \rightarrow \infty$ 时**无偏收敛**到真值（误差 $\sim O(1/\sqrt{N})$ ），是非线性传播的**基准**；
- **代价：**精度依赖样本量，常需 $N \sim 10^4 - 10^6$ ，实时滤波太慢。

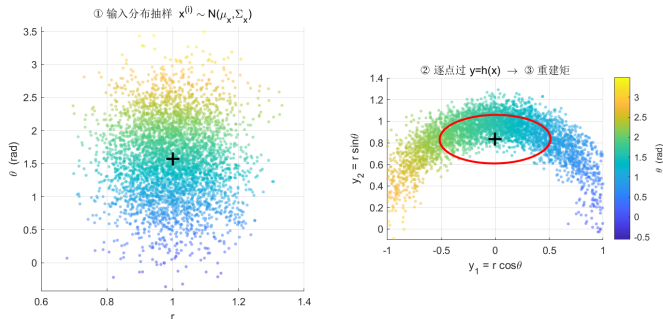
启示：UKF 可看作精心挑选**极少数确定性样本**的蒙特卡洛——仅用 $2n_x + 1$ 个点就逼近同样的均值与协方差。

蒙特卡洛传播过程 (图示)



以极坐标 $\rightarrow$ 直角坐标 $y_1 = r \cos \theta, y_2 = r \sin \theta$ 为例 (4000 个样本, 按角度 θ 着色):

蒙特卡洛传播过程 (图示)



以极坐标 $\rightarrow$ 直角坐标 $y_1 = r \cos \theta$, $y_2 = r \sin \theta$ 为例 (4000 个样本, 按角度 θ 着色):

- **左**: 输入样本——围绕均值的“扇形”散点分布;
- **右**: 逐点过 h 后映射成一段**圆弧** (同色对应同一样本), 黑色 + 为样本均值、红椭圆为样本协方差;
- 大样本下右图的均值/协方差即视为**真值**, 用以检验 EKF / UKF。

无迹卡尔曼滤波 (UKF)

核心思想：用样本点而非 Jacobian

- EKF: **线性化函数** (近似 f) $\Rightarrow$ 仅保一阶项;
- UKF: **线性化分布** (近似 $p(\mathbf{x})$) $\Rightarrow$ 用一组确定性的**Sigma 点**承载分布的均值与协方差。

核心思想：用样本点而非 Jacobian

- EKF: **线性化函数** (近似 f) $\Rightarrow$ 仅保一阶项;
- UKF: **线性化分布** (近似 $p(\mathbf{x})$) $\Rightarrow$ 用一组确定性的**Sigma 点**承载分布的均值与协方差。

无迹变换 (Unscented Transform, UT)

传播均值与协方差的过程:

1. 选取 $2n_x + 1$ 个 sigma 点, 使其样本均值/协方差与原分布相同;
2. 让**每个点**经过非线性函数 f 传播;
3. 由传播后的点集**重建**均值与协方差。

核心思想：用样本点而非 Jacobian

- EKF: **线性化函数** (近似 f) $\Rightarrow$ 仅保一阶项;
- UKF: **线性化分布** (近似 $p(\mathbf{x})$) $\Rightarrow$ 用一组确定性的**Sigma 点**承载分布的均值与协方差。

无迹变换 (Unscented Transform, UT)

传播均值与协方差的过程:

1. 选取 $2n_x + 1$ 个 sigma 点, 使其样本均值/协方差与原分布相同;
2. 让**每个点**经过非线性函数 f 传播;
3. 由传播后的点集**重建**均值与协方差。

关键性质: 对二阶矩准确 (对高斯输入可精确到三阶), 无需 Jacobian, 对不可微函数同样适用。

对 n_x 维随机向量 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$, 选取 $2n_x + 1$ 个 sigma 点:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \boldsymbol{\mu}_x$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\mu}_x + \left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n_x$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+n_x} = \boldsymbol{\mu}_x - \left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n_x$$

对 n_x 维随机向量 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$, 选取 $2n_x + 1$ 个 sigma 点:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \boldsymbol{\mu}_x$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\mu}_x + \left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n_x$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+n_x} = \boldsymbol{\mu}_x - \left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n_x$$

其中 $\left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i$ 表示矩阵平方根 (如 Cholesky 分解) 的第 i 列。

对 n_x 维随机向量 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$, 选取 $2n_x + 1$ 个 sigma 点:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \boldsymbol{\mu}_x$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\mu}_x + \left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n_x$$

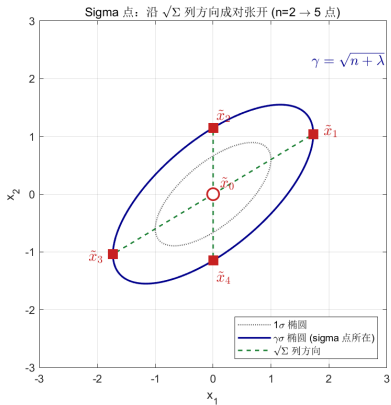
$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+n_x} = \boldsymbol{\mu}_x - \left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i, \quad i = 1, \dots, n_x$$

其中 $\left(\sqrt{(n_x + \lambda) \boldsymbol{\Sigma}_x} \right)_i$ 表示矩阵平方根 (如 Cholesky 分解) 的第 i 列。

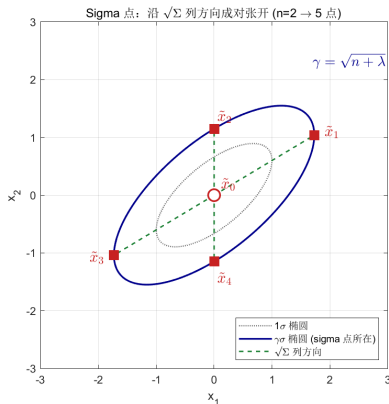
缩放参数 $\lambda = \alpha^2(n_x + \kappa) - n_x$

- α (一般取 $10^{-3} \sim 1$): 控制 sigma 点离均值的**弥散程度**;
- κ : 次要缩放参数, 取 0 或 $3 - n_x$;
- β (仅用于协方差权重): 对高斯先验最优值为 $\beta = 2$ 。

Sigma 点的几何直观



Sigma 点的几何直观



以二维 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 为例 ($\boldsymbol{\Sigma}$ 含相关性, 椭圆是斜的):

- 中心点 $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \boldsymbol{\mu}$ (空心圆);
- 其余 $2n_x = 4$ 个点沿**矩阵平方根 $\sqrt{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的列方向** (绿虚线)**成对**向外张开;
- 它们恰好落在放大了 $\gamma = \sqrt{n_x + \lambda}$ 倍的协方差椭圆上;
- 点的分布完整**编码**了均值与协方差——这正是后续传播的载体。

每个 sigma 点配一对权重:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda}$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n_x$$

每个 sigma 点配一对权重:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda}$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n_x$$

上标 (m) , (c) 区分**均值权重**与**协方差权重**; 只在 $i = 0$ 处不同—— $W_0^{(c)}$ 多了一项 $(1 - \alpha^2 + \beta)$ 用于补偿高阶矩。

每个 sigma 点配一对权重:

$$\begin{aligned}w_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{n_x + \lambda} \\w_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{n_x + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\w_i^{(m)} = w_i^{(c)} &= \frac{1}{2(n_x + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n_x\end{aligned}$$

上标 (m) , (c) 区分**均值权重**与**协方差权重**; 只在 $i = 0$ 处不同—— $w_0^{(c)}$ 多了一项 $(1 - \alpha^2 + \beta)$ 用于补偿高阶矩。

权重满足 $\sum_i w_i^{(m)} = 1$, 保证均值的无偏重建。

用 Sigma 点重建分布矩

对任意非线性变换 $g(\cdot)$, 让每个 sigma 点穿过它, 记 $\tilde{\mathbf{y}}_i = g(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, 再按权重加权即可重建输出分布的前两阶矩:

无迹变换的核心公式

$$\hat{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \tilde{\mathbf{y}}_i$$

$$\text{Cov}[g(\mathbf{x})] \approx \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}})(\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}})^T$$

用 Sigma 点重建分布矩

对任意非线性变换 $g(\cdot)$, 让每个 sigma 点穿过它, 记 $\tilde{y}_i = g(\tilde{x}_i)$, 再按权重加权即可重建输出分布的前两阶矩:

无迹变换的核心公式

$$\hat{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(m)} \tilde{\mathbf{y}}_i$$
$$\text{Cov}[g(\mathbf{x})] \approx \sum_{i=0}^{2n_x} W_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}})(\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}})^T$$

这与蒙特卡洛的重建步形式一致, 区别仅在于: sigma 点是**确定性选取**的极少数点 ($2n_x + 1$ 个), 而非成千上万的随机样本。对高斯输入, 该重建可精确到**三阶矩**。

初始化： $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

初始化： $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

(a) 生成 sigma 点 (在 $\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$, $\Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}}$ 处)

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}^i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n_{\mathbf{x}}$$

初始化： $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

(a) 生成 sigma 点 (在 $\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$, $\Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}}$ 处)

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}^i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n_x$$

(b) 通过非线性方程传播每个 sigma 点

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i = f(\tilde{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}^i, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0})$$

初始化： $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$, $\Sigma_{0|0}^{\mathbf{x}} = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

(a) 生成 sigma 点 (在 $\hat{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}$, $\Sigma_{n-1|n-1}^{\mathbf{x}}$ 处)

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}^i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n_x$$

(b) 通过非线性方程传播每个 sigma 点

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i = f(\tilde{\mathbf{x}}_{n-1|n-1}^i, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{0})$$

(c) 重建预测均值与协方差

$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i$$

$$\Sigma_{n|n-1}^{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})^T + \Sigma_{n-1}^{\mathbf{w}}$$

(d) 观测预测：sigma 点过 h

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i = h(\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i, \mathbf{0}), \quad \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i$$

(d) 观测预测：sigma 点过 h

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i = h(\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i, \mathbf{0}), \quad \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i$$

(e) 观测协方差与互协方差

$$\Sigma_n^y = \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1})(\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1})^T + \Sigma_n^v$$
$$\Sigma_n^{xy} = \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1})^T$$

(d) 观测预测：sigma 点过 h

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i = h(\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i, \mathbf{0}), \quad \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1} = \sum_{i=0}^{2n_x} w_i^{(m)} \tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i$$

(e) 观测协方差与互协方差

$$\begin{aligned}\Sigma_n^y &= \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1})(\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1})^T + \Sigma_n^v \\ \Sigma_n^{xy} &= \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{x}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1})(\tilde{\mathbf{y}}_{n|n-1}^i - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1})^T\end{aligned}$$

(f) 增益与更新

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_n &= \Sigma_n^{xy} (\Sigma_n^y)^{-1}, \quad \hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{G}_n (\mathbf{y}_n - \hat{\mathbf{y}}_{n|n-1}) \\ \Sigma_{n|n}^x &= \Sigma_{n|n-1}^x - \mathbf{G}_n \Sigma_n^y \mathbf{G}_n^T\end{aligned}$$

二维算例：极坐标 $\rightarrow$ 直角坐标

算例设置：极坐标到直角坐标

雷达以**极坐标**测得距离 r 与方位角 θ ，需转换到**直角坐标**：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

算例设置：极坐标到直角坐标

雷达以**极坐标**测得距离 r 与方位角 θ ，需转换到**直角坐标**：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

设 $r \sim \mathcal{N}(1, 0.1^2)$, $\theta \sim \mathcal{N}(\frac{\pi}{2}, 0.6^2)$, 二者独立。

算例设置：极坐标到直角坐标

雷达以**极坐标**测得距离 r 与方位角 θ ，需转换到**直角坐标**：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

设 $r \sim \mathcal{N}(1, 0.1^2)$, $\theta \sim \mathcal{N}(\frac{\pi}{2}, 0.6^2)$, 二者独立。

由 r, θ 独立，可得到解析均值参照：

$$\mathbb{E}[y_1] = 0, \quad \mathbb{E}[y_2] = \mathbb{E}[r] \mathbb{E}[\sin \theta] = e^{-\sigma_\theta^2/2} = e^{-0.18} \approx \mathbf{0.835}$$

算例设置：极坐标到直角坐标

雷达以**极坐标**测得距离 r 与方位角 θ ，需转换到**直角坐标**：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

设 $r \sim \mathcal{N}(1, 0.1^2)$, $\theta \sim \mathcal{N}(\frac{\pi}{2}, 0.6^2)$, 二者独立。

由 r, θ 独立，可得到解析均值参照：

$$\mathbb{E}[y_1] = 0, \quad \mathbb{E}[y_2] = \mathbb{E}[r] \mathbb{E}[\sin \theta] = e^{-\sigma_\theta^2/2} = e^{-0.18} \approx \mathbf{0.835}$$

关键现象：角度不确定性使样本落在一段**圆弧**上，取平均后均值被**向圆心拉回**，这正是 EKF 一阶线性化容易漏掉的二阶效应。

EKF: 线性传递导致系统误差

EKF 在均值点 $\mu_{\mathbf{x}} = (1, \frac{\pi}{2})^T$ 处用切平面近似:

$$h(\mathbf{x}) \approx h(\mu_{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu_{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EKF: 线性传递导致系统误差

EKF 在均值点 $\mu_x = (1, \frac{\pi}{2})^T$ 处用切平面近似:

$$h(\mathbf{x}) \approx h(\mu_x) + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mu_x), \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu_x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因而 EKF 的均值与协方差传递为

$$\hat{\mathbf{y}}^{\text{EKF}} = h(\mu_x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_y^{\text{EKF}} = \mathbf{C}\Sigma_x\mathbf{C}^T = \text{diag}(0.6^2, 0.1^2)$$

EKF: 线性传递导致系统误差

EKF 在均值点 $\mu_x = (1, \frac{\pi}{2})^T$ 处用切平面近似:

$$h(\mathbf{x}) \approx h(\mu_x) + \mathbf{C}(\mathbf{x} - \mu_x), \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu_x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因而 EKF 的均值与协方差传递为

$$\hat{\mathbf{y}}^{\text{EKF}} = h(\mu_x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_y^{\text{EKF}} = \mathbf{C} \Sigma_x \mathbf{C}^T = \text{diag}(0.6^2, 0.1^2)$$

误差来源

真实/Monte Carlo 参照为 $\mathbb{E}[y_2] \approx 0.835$, 而 EKF 给出 1.000, **高估约 19.7%**。一阶线性传递只看均值点的切线, 无法表达圆弧曲率导致的均值回缩, 也会给出朝向偏差明显的协方差椭圆。

UKF: Sigma 点传递突出精度

$n_x = 2 \Rightarrow 2n_x + 1 = 5$ 个 sigma 点。取

$$\alpha = 1, \kappa = 3 - n_x = 1, \beta = 2 \Rightarrow \lambda = 1, \gamma = \sqrt{n_x + \lambda} = \sqrt{3}.$$

UKF: Sigma 点传递突出精度

$n_x = 2 \Rightarrow 2n_x + 1 = 5$ 个 sigma 点。取

$$\alpha = 1, \kappa = 3 - n_x = 1, \beta = 2 \Rightarrow \lambda = 1, \gamma = \sqrt{n_x + \lambda} = \sqrt{3}。$$

以 $\Sigma_x = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2)$, 矩阵平方根的列为 $\gamma[\sigma_r, 0]^T$ 与 $\gamma[0, \sigma_\theta]^T$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = (1, \frac{\pi}{2}) \quad (\text{中心})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = (1 \pm \sqrt{3} \cdot 0.1, \frac{\pi}{2}) \quad (\text{沿} r \text{ 方向})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{2,4} = (1, \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{3} \cdot 0.6) \quad (\text{沿} \theta \text{ 方向})$$

UKF: Sigma 点传递突出精度

$n_x = 2 \Rightarrow 2n_x + 1 = 5$ 个 sigma 点。取

$$\alpha = 1, \kappa = 3 - n_x = 1, \beta = 2 \Rightarrow \lambda = 1, \gamma = \sqrt{n_x + \lambda} = \sqrt{3}.$$

以 $\Sigma_x = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2)$, 矩阵平方根的列为 $\gamma [\sigma_r, 0]^T$ 与 $\gamma [0, \sigma_\theta]^T$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = (1, \frac{\pi}{2}) \quad (\text{中心})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = (1 \pm \sqrt{3} \cdot 0.1, \frac{\pi}{2}) \quad (\text{沿 } r \text{ 方向})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{2,4} = (1, \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{3} \cdot 0.6) \quad (\text{沿 } \theta \text{ 方向})$$

权重 $w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} = \frac{1}{3}$, $w_{1\dots 4}^{(m)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} = \frac{1}{6}$ 。让每个点过 h , 加权重建得

$$\hat{\mathbf{y}}^{\text{UKF}} = [0, \mathbf{0.836}]^T, \quad \Sigma_y^{\text{UKF}} = \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}^{\text{UKF}})(\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}^{\text{UKF}})^T$$

UKF: Sigma 点传递突出精度

$n_x = 2 \Rightarrow 2n_x + 1 = 5$ 个 sigma 点。取

$$\alpha = 1, \kappa = 3 - n_x = 1, \beta = 2 \Rightarrow \lambda = 1, \gamma = \sqrt{n_x + \lambda} = \sqrt{3}。$$

以 $\Sigma_x = \text{diag}(\sigma_r^2, \sigma_\theta^2)$, 矩阵平方根的列为 $\gamma [\sigma_r, 0]^T$ 与 $\gamma [0, \sigma_\theta]^T$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = (1, \frac{\pi}{2}) \quad (\text{中心})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,3} = (1 \pm \sqrt{3} \cdot 0.1, \frac{\pi}{2}) \quad (\text{沿} r \text{ 方向})$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{2,4} = (1, \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{3} \cdot 0.6) \quad (\text{沿} \theta \text{ 方向})$$

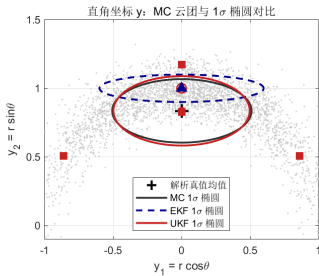
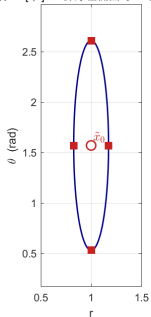
权重 $w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n_x + \lambda} = \frac{1}{3}$, $w_{1...4}^{(m)} = \frac{1}{2(n_x + \lambda)} = \frac{1}{6}$ 。让每个点过 h , 加权重建得

$$\hat{\mathbf{y}}^{\text{UKF}} = [0, 0.836]^T, \quad \Sigma_y^{\text{UKF}} = \sum_i w_i^{(c)} (\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}^{\text{UKF}})(\tilde{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}^{\text{UKF}})^T$$

UKF 通过非线性传递 sigma 点捕捉圆弧曲率, 均值误差约 0.1%, 协方差椭圆也更接近 Monte Carlo 结果。

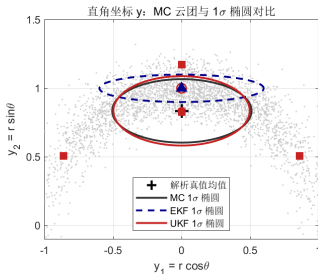
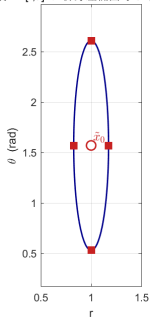
三方对比: EKF / UKF / Monte Carlo

极坐标 $x=[r,\theta]^T$: 协方差椭圆与 5 个 Sigma 点



三方对比: EKF / UKF / Monte Carlo

极坐标 $x=[r,\theta]^T$: 协方差椭圆与 5 个 Sigma 点



- **左图**: 极坐标空间的 $1-\gamma$ 协方差椭圆与 5 个 sigma 点 (空心圆为中心点);
- **右图**: 10^5 个 Monte Carlo 样本构成的**香蕉形云团**, 黑色 + 为解析真值均值, 黑色实线为 MC 计算的 1σ 椭圆;
- **蓝虚椭圆 (EKF)** 中心偏高、朝向偏差明显; **红实椭圆 (UKF)** 与 MC 椭圆**几乎重合**, 均值也落在真值附近。

数值小结: UKF 的优势

$\mathbb{E}[y_2]$ 估计	真值/MC	EKF	UKF
数值	0.835	1.000	0.836
相对误差	—	+19.7%	+0.1%

数值小结：UKF 的优势

$\mathbb{E}[y_2]$ 估计	真值/MC	EKF	UKF
数值	0.835	1.000	0.836
相对误差	—	+19.7%	+0.1%

- UKF 与 Monte Carlo (10^5 样本) 几乎重合, 但只用 **5 个点**;
- EKF 因忽略二阶项, 在中等以上非线性下**系统性偏差**显著;
- 本算例清楚展示: UKF 不仅修正**均值**, 还能给出朝向、形状**正确的协方差**——这正是其相对 EKF 的核心优势。

工程算例：Bouc-Wen 滞回系统辨识

滞回 (hysteresis)：恢复力不仅取决于当前变形，还依赖**变形历史**——加载与卸载走不同路径，包络成**滞回环**，环内面积即结构**耗散的能量**。强震下结构进入非线性、靠滞回耗能，是抗震设计的核心。

滞回 (hysteresis)：恢复力不仅取决于当前变形，还依赖**变形历史**——加载与卸载走不同路径，包络成**滞回环**，环内面积即结构**耗散的能量**。强震下结构进入非线性、靠滞回耗能，是抗震设计的核心。

典型土木工程场景

- 钢/钢筋混凝土构件**屈服后**的滞回耗能；
- **隔震**支座（铅芯橡胶支座 LRB）与**消能减震**装置（金属/黏滞/磁流变 MR 阻尼器）；
- **结构健康监测 (SHM)**：在线辨识刚度等参数，判断结构**损伤与刚度退化**。

滞回 (hysteresis)：恢复力不仅取决于当前变形，还依赖**变形历史**——加载与卸载走不同路径，包络成**滞回环**，环内面积即结构**耗散的能量**。强震下结构进入非线性、靠滞回耗能，是抗震设计的核心。

典型土木工程场景

- 钢/钢筋混凝土构件**屈服后**的滞回耗能；
- **隔震**支座（铅芯橡胶支座 LRB）与**消能减震**装置（金属/黏滞/磁流变 MR 阻尼器）；
- **结构健康监测 (SHM)**：在线辨识刚度等参数，判断结构**损伤与刚度退化**。

Bouc-Wen 模型用一个**一阶微分方程**描述光滑滞回，参数少、对各类滞回形状适配性强，是工程中最常用的**唯象滞回模型**。

单自由度结构在地震动 $\ddot{x}_g$ 下:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + r = -m\ddot{x}_g, \quad r = \alpha kx + (1 - \alpha)kz$$

单自由度结构在地震动 $\ddot{x}_g$ 下:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + r = -m\ddot{x}_g, \quad r = \alpha kx + (1 - \alpha)kz$$

恢复力 r 由**弹性部分** αkx 与**滞回部分** $(1 - \alpha)kz$ 组成; 滞回位移 z 自身满足:

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta|\dot{x}| |z|^{n-1}z - \gamma\dot{x} |z|^n$$

Bouc-Wen 模型方程

单自由度结构在地震动 $\ddot{x}_g$ 下:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + r = -m\ddot{x}_g, \quad r = \alpha kx + (1 - \alpha)kz$$

恢复力 r 由**弹性部分** αkx 与**滞回部分** $(1 - \alpha)kz$ 组成; 滞回位移 z 自身满足:

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta|\dot{x}| |z|^{n-1}z - \gamma\dot{x} |z|^n$$

参数	物理含义
α	屈服后刚度 / 初始刚度之比
A, β, γ	控制滞回环的幅值与形状 (饱和值 $z_u = (A/(\beta + \gamma))^{1/n}$)
n	控制屈服 过渡的尖锐程度

Bouc-Wen 模型方程

单自由度结构在地震动 $\ddot{x}_g$ 下:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + r = -m\ddot{x}_g, \quad r = \alpha kx + (1 - \alpha)kz$$

恢复力 r 由**弹性部分** αkx 与**滞回部分** $(1 - \alpha)kz$ 组成; 滞回位移 z 自身满足:

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta|\dot{x}| |z|^{n-1}z - \gamma\dot{x} |z|^n$$

参数	物理含义
α	屈服后刚度 / 初始刚度之比
A, β, γ	控制滞回环的幅值与形状 (饱和值 $z_u = (A/(\beta + \gamma))^{1/n}$)
n	控制屈服 过渡的尖锐程度

强非线性根源: $\dot{z}$ 含**绝对值与幂次**, 在速度/位移**反向处不光滑** $\Rightarrow$ Jacobian 不连续, EKF 线性化严格意义上不成立。

辨识问题设置 (SHM 视角)

任务：仅由**含噪加速度**量测，**在线**辨识不可直接测量的滞回状态 z 与**未知刚度** k (最直接的损伤/退化指标)。

辨识问题设置 (SHM 视角)

任务：仅由**含噪加速度**量测，**在线**辨识不可直接测量的滞回状态 z 与**未知刚度** k (最直接的损伤/退化指标)。

增广状态与模型

$$\mathbf{x} = [x, \dot{x}, z, k]^T, \quad \dot{k} = 0 \text{ (随机游走, 待辨识)}$$

$$y = \underbrace{-\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}(\alpha x + (1 - \alpha)z)}_{\text{绝对加速度}} + v$$

量测对 k 与状态构成**双线性**项 $k \cdot x$, $k \cdot z \Rightarrow$ EKF 一阶线性化**丢掉二阶交叉项**。

辨识问题设置 (SHM 视角)

任务：仅由**含噪加速度**量测，**在线**辨识不可直接测量的滞回状态 z 与**未知刚度** k (最直接的损伤/退化指标)。

增广状态与模型

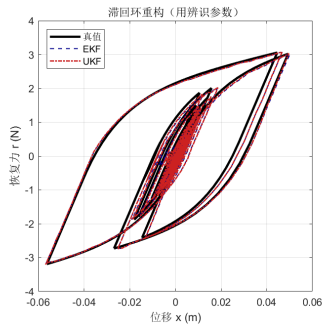
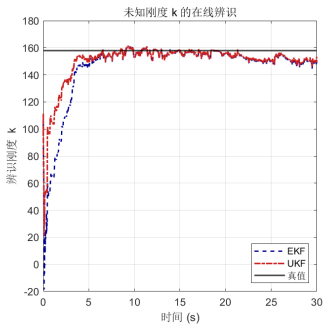
$$\mathbf{x} = [x, \dot{x}, z, k]^T, \quad \dot{k} = 0 \text{ (随机游走, 待辨识)}$$

$$y = \underbrace{-\frac{c}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}(\alpha x + (1 - \alpha)z)}_{\text{绝对加速度}} + v$$

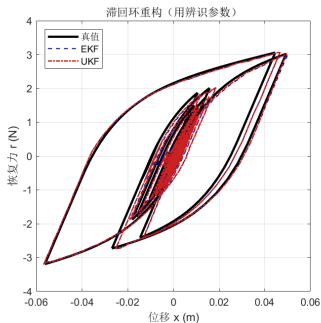
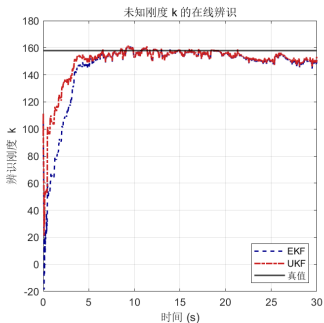
量测对 k 与状态构成**双线性**项 $k \cdot x$, $k \cdot z \Rightarrow$ EKF 一阶线性化**丢掉二阶交叉项**。

- 真值：取一条 30 s 地震动 ($dt = 0.01s$) 精细 RK4 仿真，结构屈服明显；
- **EKF** 用数值 Jacobian；**UKF** 用 $2n_x + 1 = 9$ 个 sigma 点；
- 初始刚度猜测**偏低** 40%，考察收敛速度、精度与计算量。

结果：刚度辨识与滞回环重构



结果：刚度辨识与滞回环重构



- **左**：未知刚度 k 的在线辨识——UKF (红) 收敛更快、更平稳，EKF (蓝) 前几秒明显滞后；两者终值都接近真值 (灰线)；
- **右**：用辨识参数重构的滞回环与真值 (黑) 基本吻合，说明从有限传感器即可还原结构的恢复力—位移本构。

精度与计算效率对比

指标	EKF	UKF	UKF 表现
滞回状态 z 的 RMSE	2.6×10^{-4}	2.1×10^{-4}	↓ 20%
刚度 k 末值误差	5.7%	5.0%	更优
稳态刚度误差 ($t > 10$ s)	2.8%	2.5%	更优
运行时间 (3000 步)	≈ 70 ms	≈ 96 ms	$\approx 1.4\times$ 开销

精度与计算效率对比

指标	EKF	UKF	UKF 表现
滞回状态 z 的 RMSE	2.6×10^{-4}	2.1×10^{-4}	↓ 20%
刚度 k 末值误差	5.7%	5.0%	更优
稳态刚度误差 ($t > 10$ s)	2.8%	2.5%	更优
运行时间 (3000 步)	≈ 70 ms	≈ 96 ms	$\approx 1.4 \times$ 开销

- **精度**: UKF 对**不可测的** z 明显更准 (RMSE 降约 20%), 刚度收敛更快更稳——sigma 点抓住了双线性/不光滑项的二阶效应;
- **效率**: UKF 每步要传播 9 个点, 约为 EKF 的 1.4 倍耗时; 但**免去推导**滞回模型不连续的 Jacobian, 更易实现、更稳健。

滤波算法的工程实现与优化

理论推导给出了最优递推公式，但要在实际系统中**长期稳定运行**，还需解决：

- **数值稳定性**：有限字长与累积舍入误差会让协方差 Σ^x 失去**对称性 / 正定性**，严重时导致滤波**发散**；
- **噪声统计未知**： Σ^w 、 Σ^v 往往**难以预知** 或**随工况漂移**，固定取值会明显降低估计精度。

理论推导给出了最优递推公式，但要在实际系统中**长期稳定运行**，还需解决：

- **数值稳定性**：有限字长与累积舍入误差会让协方差 Σ^x 失去**对称性 / 正定性**，严重时导致滤波**发散**；
- **噪声统计未知**： Σ^w 、 Σ^v 往往**难以预知** 或**随工况漂移**，固定取值会明显降低估计精度。

对应两类工程技术：

- (1) 协方差与增益的**稳定化**：Joseph 形式、正则化、稳健求逆；
- (2) **自适应滤波**：在线估计噪声、强跟踪突变。

协方差更新的数值稳定性：Joseph 形式

后验协方差的标准 (Joseph) 形式：

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d)^T + \mathbf{G}_n \Sigma_n^v \mathbf{G}_n^T$$

两个“对称二次型”之和 $\Rightarrow$ 结果**自动对称、半正定**。

协方差更新的数值稳定性：Joseph 形式

后验协方差的标准 (Joseph) 形式：

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d)^T + \mathbf{G}_n \Sigma_n^v \mathbf{G}_n^T$$

两个“对称二次型”之和 $\Rightarrow$ 结果**自动对称、半正定**。

常见**简化形式**计算更省：

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x$$

但它**不保证对称**，舍入误差累积会破坏正定性，长时间运行可能**发散**。

协方差更新的数值稳定性：Joseph 形式

后验协方差的标准 (Joseph) 形式：

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d)^T + \mathbf{G}_n \Sigma_n^v \mathbf{G}_n^T$$

两个“对称二次型”之和 $\Rightarrow$ 结果**自动对称、半正定**。

常见**简化形式**计算更省：

$$\Sigma_{n|n}^x = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x$$

但它**不保证对称**，舍入误差累积会破坏正定性，长时间运行可能**发散**。

折中：显式对称化

实时性受限而必须用简化式时，至少强制对称：

$$\Sigma_{n|n}^x \leftarrow \frac{1}{2} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d) \Sigma_{n|n-1}^x + \Sigma_{n|n-1}^x (\mathbf{I} - \mathbf{G}_n \mathbf{C}_d)^T \right]$$

协方差正则化 (防止失去正定性):

- 特征值截断: $\lambda_i \leftarrow \max(\lambda_i, \epsilon);$
- 加微小对角项: $\Sigma_{n|n}^x \leftarrow \Sigma_{n|n}^x + \delta \mathbf{I}.$

协方差正则化与增益的稳健求逆

协方差正则化 (防止失去正定性):

- 特征值截断: $\lambda_i \leftarrow \max(\lambda_i, \epsilon)$;
- 加微小对角项: $\Sigma_{n|n}^x \leftarrow \Sigma_{n|n}^x + \delta \mathbf{I}$.

卡尔曼增益含矩阵求逆, 记**预测残差协方差** $\Sigma_n^r = \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v$:

$$\mathbf{G}_n = \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T (\Sigma_n^r)^{-1}$$

当 Σ_n^r **接近奇异**时直接求逆不稳定, 可用:

- **SVD 伪逆**: 截断过小奇异值, $(\Sigma_n^r)^{-1} \approx \mathbf{V} \Sigma^\dagger \mathbf{U}^T$;
- **序贯处理**: 高维观测拆成多个标量逐一更新, **免去大矩阵求逆**;
- **正则化**: $\Sigma_n^r \leftarrow \Sigma_n^r + \epsilon \mathbf{I}$.

自适应卡尔曼滤波：在线估计噪声统计

动机： Σ^w 、 Σ^v 未知或时变时，固定取值不再最优。

自适应卡尔曼滤波：在线估计噪声统计

动机： Σ^w 、 Σ^v 未知或时变时，固定取值不再最优。

预测残差序列携带噪声信息：

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T] = \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v$$

自适应卡尔曼滤波：在线估计噪声统计

动机： Σ^w 、 Σ^v 未知或时变时，固定取值不再最优。

预测残差序列携带噪声信息：

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T] = \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v$$

用**滑动窗口**估计其真实协方差，再反推观测噪声：

$$\hat{\Sigma}_n^r = \frac{1}{M} \sum_{i=n-M+1}^n \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T, \quad \hat{\Sigma}_n^v = \hat{\Sigma}_n^r - \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T$$

自适应卡尔曼滤波：在线估计噪声统计

动机： Σ^w 、 Σ^v 未知或时变时，固定取值不再最优。

预测残差序列携带噪声信息：

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T] = \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v$$

用**滑动窗口**估计其真实协方差，再反推观测噪声：

$$\hat{\Sigma}_n^r = \frac{1}{M} \sum_{i=n-M+1}^n \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T, \quad \hat{\Sigma}_n^v = \hat{\Sigma}_n^r - \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T$$

实时实现常改用**遗忘因子** $\rho \in [0, 1)$ 的指数加权递推（无需缓存窗口）：

$$\hat{\Sigma}_n^r = \rho \hat{\Sigma}_{n-1}^r + (1 - \rho) \mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T$$

$\rho \rightarrow 1$ 更平滑抗噪， ρ 越小遗忘越快、对突变越灵敏；

自适应卡尔曼滤波：在线估计噪声统计

动机： Σ^w 、 Σ^v 未知或时变时，固定取值不再最优。

预测残差序列携带噪声信息：

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}, \quad \mathbb{E}[\mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T] = \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T + \Sigma_n^v$$

用**滑动窗口**估计其真实协方差，再反推观测噪声：

$$\hat{\Sigma}_n^r = \frac{1}{M} \sum_{i=n-M+1}^n \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T, \quad \hat{\Sigma}_n^v = \hat{\Sigma}_n^r - \mathbf{C}_d \Sigma_{n|n-1}^x \mathbf{C}_d^T$$

实时实现常改用**遗忘因子** $\rho \in [0, 1)$ 的指数加权递推（无需缓存窗口）：

$$\hat{\Sigma}_n^r = \rho \hat{\Sigma}_{n-1}^r + (1 - \rho) \mathbf{r}_n \mathbf{r}_n^T$$

$\rho \rightarrow 1$ 更平滑抗噪， ρ 越小遗忘越快、对突变越灵敏；反推 $\hat{\Sigma}_n^v$ 若失正定，则回退 $\hat{\Sigma}_n^v = \gamma \Sigma_{n-1}^v$ ($\gamma \in (0, 1]$)。

小结

小结: EKF vs UKF

	EKF	UKF
近似对象	非线性函数 (Taylor 一阶)	状态分布 (确定性采样)
需要 Jacobian	是	否
矩准确度	一阶	二阶 (高斯可至三阶)
计算量	$O(n_x^2)$	$O(n_x^3)$ (含矩阵平方根)
不可微函数	失效	可用
展开点退化	协方差归零 (如 $y = x^2$)	不受影响
实现复杂度	低	中

小结: EKF vs UKF

	EKF	UKF
近似对象	非线性函数 (Taylor 一阶)	状态分布 (确定性采样)
需要 Jacobian	是	否
矩准确度	一阶	二阶 (高斯可至三阶)
计算量	$O(n_x^2)$	$O(n_x^3)$ (含矩阵平方根)
不可微函数	失效	可用
展开点退化	协方差归零 (如 $y = x^2$)	不受影响
实现复杂度	低	中

选用原则:

- 系统接近线性、Jacobian 易得 $\Rightarrow$ 优先用 EKF;
- 非线性强、Jacobian 难算或退化 $\Rightarrow$ 用 UKF;
- 状态空间高维但函数光滑 $\Rightarrow$ EKF 计算更省。

谢谢

提问与讨论